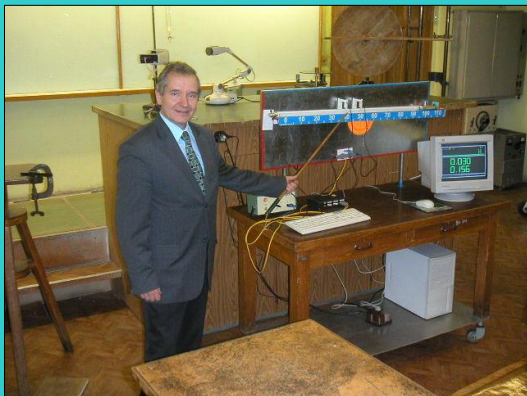


# ЧАСТНЫЕ ВОПРОСЫ КУРСА ФИЗИКИ



Москва  
2010

Государственное образовательное учреждение высшего  
профессионального образования  
«Московский педагогический государственный университет»  
(МПГУ)

---

---

# ЧАСТНЫЕ ВОПРОСЫ КУРСА ФИЗИКИ

Под редакцией В.Н. Александрова

*Рекомендовано  
Учебно-методическим объединением  
по специальностям педагогического образования  
в качестве учебного пособия для студентов  
высших учебных заведений, обучающихся  
по специальности 050502.65 - технология и предпринимательство*

Москва • 2010

УДК 53(075)

ББК 22.3я73

A465

**Печатается по решению кафедры общей и  
экспериментальной физики МПГУ**

**При финансовой поддержке Федеральной целевой  
Программы «Научные и научно-педагогические  
кадры инновационной России»  
(Государственный контракт №02.740.11.0228).**

**Авторы:**

A465 В.Н. Александров, М.С. Каменецкая, К.В. Смирнов

**Рецензенты:**

В.Ф. Банная, д.ф.-м.н., профессор (Московский  
государственный гуманитарный университет име-  
ни М.А. Шолохова);

Ю.Л. Хотунцев, д.ф.-м.н., профессор (МПГУ)

«Частные вопросы курса физики». Учебное пособие/  
В.Н. Александров, М.С. Каменецкая, К.В. Смирнов; Под  
ред. В.Н. Александрова – М.: 2010. – 196с.; ил.

Предназначается в качестве учебного пособия по физике студентам факультета технологии и предпринимательства МПГУ. Содержит теоретический материал по основным разделам физики и подробные решения типовых задач. Пособие предназначено для организации самостоятельной работы студентов при подготовке к лабораторным работам и может быть использовано преподавателями при проведении вводных занятий по темам в лабораторном практикуме по физике.

ISBN 978-5-94101-232-2

© Александров Владимир Николаевич, 2010

© Каменецкая Маргарита Самуиловна, 2010

© Смирнов Константин Владимирович, 2010

© ГОУ ВПО «Московский педагогический  
государственный университет» (МПГУ), 2010

## От авторов

Курс физики в подготовке студентов педагогических университетов по специальностям факультета технологии и предпринимательства (ФТиП) является непрофилирующим, но играет важнейшую роль. С одной стороны, изучение физики как общеобразовательного предмета должно формировать у студентов общее представление об основных законах окружающей нас неживой природы и на этой основе современную естественно-научную картину мира. С другой стороны, знания по физике необходимы студентам для усвоения специальных технических дисциплин (теория машин и механизмов, теплотехника, электро- и радиотехника, информационные технологии и др.).

В соответствии с учебными планами этих специальностей в одних из них предусматриваются только лекционные и лабораторные занятия (2-х семестровый курс физики), в других они дополняются в одном семестре семинарами (3-х семестровый курс). Все виды аудиторных занятий проводятся по два академических часа в неделю, и углубленное освоение изучаемого материала и решение задач по физике, в основном, выносятся на самостоятельную работу студентов. Однако организация самостоятельной работы студентов этих специальностей встречает большие трудности.

Поэтому в дополнение к основному учебнику по физике для студентов ФТиП («Курс физики» Трофимовой Т.И.), по инициативе профессора Л.Б.Литвак-Горской с середины 80-х годов прошлого века преподаватели кафедры общей и экспериментальной физики (КОЭФ) подготовили и издали несколько выпусков сборников методических рекомендаций и пособий для организации этой работы. Настоящее учебное пособие является обобщением более чем тридцатилетнего опыта преподавания физики студентам ФТиП. Оно позволит, с одной стороны, помочь студентам в самостоятельной работе. С другой стороны, поможет преподавателям проводить вводные занятия по темам в лабораторном практикуме, на которых студенты знакомятся как с лабораторными установками, так и с теорией и методикой проведения лабораторных экспериментов.

Пособие содержит: программу курса физики; краткие теоретические сведения по изучаемым темам курса физики, изучаемых в лабораторном практикуме; примеры подробного решения физических задач, содержание которых частично соответствует содержанию выполняемых лабораторных работ; список рекомендуемой литературы.

Для организации самостоятельной работы студентов в комплекте с настоящим пособием издается «Лабораторный практикум по физике» и «Сборник задач по физике с примерами решений».

Авторы благодарны заведующему КОЭФ, профессору Г.Н. Гольцману и преподавателям и сотрудникам КОЭФ за ценные рекомендации при подготовке рукописи. Авторы признательны заведующему КОТД, профессору Ю.Л. Хотунцеву и другим преподавателям ФТиП за ценные замечания и доброжелательную критику при обсуждении пособия. Авторы признательны профессору В.Ф. Банной за проделанный труд по рецензированию рукописи и высказанные замечания, которые были учтены при редактировании пособия.

Авторы благодарны профессорам МПГУ Л.В. Королевой, Н.С. Пурышевой и А.В. Смирнову и доценту МПГУ Е.Б. Петровой за проделанный труд по рецензированию рукописи и высказанные замечания, которые были учтены при окончательном редактировании пособия и подготовке рукописи к печати.

## СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
ПРОГРАММА КУРСА ФИЗИКИ.....	6
ТЕМА 1. КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ. РАБОТА И ЭНЕРГИЯ.....	10
§ 1. Кинематика материальной точки.....	10
Примеры решения задач.....	16
§ 2. Динамика материальной точки и системы материальных точек.....	23
§ 3. Работа и энергия.....	29
Примеры решения задач.....	33
ТЕМА 2. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА.....	40
Примеры решения задач.....	46
ТЕМА 3. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ.....	52
Примеры решения задач.....	61
ТЕМА 4. МЕХАНИКА ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ.....	67
Примеры решения задач.....	72
ТЕМА 5. ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ.....	78
§ 1. Введение.....	78
§ 2. Основные положения молекулярно-кинетической теории газов.....	79
Примеры решения задач.....	85
§ 3. Основы термодинамики.....	90
Примеры решения задач.....	97
ТЕМА 6. ЭЛЕКТРОСТАТИКА.....	106
Примеры решения задач.....	113
ТЕМА 7. ПОСТОЯННЫЙ ТОК.....	119
Примеры решения задач.....	125
ТЕМА 8. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ.....	135
Примеры решения задач.....	142

ТЕМА 9.	КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ....	151
	Примеры решения задач.....	161
ТЕМА 10.	ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ И ВОЛНОВАЯ ОПТИКА.....	166
§ 1.	Геометрическая оптика.....	167
§ 2.	Волновая оптика.....	172
	Примеры решения задач.....	180
ТЕМА 11.	КВАНТОВАЯ ОПТИКА И АТОМНАЯ ФИЗИКА.....	186
§ 1.	Квантовая оптика.....	186
§ 2.	Атомная физика.....	189
	Примеры решения задач.....	192
ПРИЛОЖЕНИЕ.....		195
ЛИТЕРАТУРА.....		196

# ПРОГРАММА КУРСА ФИЗИКИ

## I. МЕХАНИКА

*Введение.* Предмет классической механики и ее место в физике.

*Кинематика точки.* Материальная точка. Система отсчета. Радиус-вектор. Векторы перемещения, скорости и ускорения. Равномерное и равноускоренное прямолинейное движение. Движение по окружности и его характеристики. Криволинейное равноускоренное движение на примере движения в однородном поле тяжести.

*Динамика материальной точки и системы материальных точек.* Инерциальная система отсчета. Силы в природе. Фундаментальные взаимодействия. Масса и ее измерение. Законы Ньютона и их применение к простейшим задачам механики. Замкнутые механические системы. Закон сохранения импульса. Центр масс. Принцип реактивного движения. Закон всемирного тяготения. Невесомость и перегрузка. Сила трения.

*Работа и энергия.* Работа силы. Мощность. КПД. Кинетическая энергия. Консервативные и диссипативные силы. Потенциальная энергия и ее связь с силой. Закон сохранения механической энергии. Упругий и неупругий удар. Потенциальная энергия гравитационного поля. Космические скорости. Движение планет и спутников.

*Механика твердого тела.* Абсолютное твердое тело. Кинетическая энергия вращательного движения. Момент инерции. Момент силы. Основное уравнение динамики вращения твердого тела вокруг неподвижной оси. Момент импульса. Сохранение момента импульса. Фундаментальность законов сохранения. Условия равновесия твердого тела. Виды равновесия. Простые механизмы (рычаг, блок и тп.).

*Механика упругих деформаций.* Понятие упругого твердого тела. Закон Гука. Упругость, пластичность, текучесть и прочность тел. Зависимость механического напряжения от относительного удлинения тел. Энергия упругих деформаций.

*Механика жидкостей и газов.* Идеальная жидкость. Законы Паскаля и Архимеда. Стационарное слоистое течение жидкости. Уравнение неразрывности струи. Уравнение Бернулли и его следствия. Течение вязкой жидкости. Гидравлический пресс и другие гидравлические механизмы. Способы измерения давления. Плавание тел в жидкости и газе. Лобовое сопротивление и подъемная сила.

*Колебания.* Кинематика гармонических колебаний. Сложение гармонических колебаний. Динамика собственных и затухающих колебаний. Математический и физический маятник. Вынужденные колебания и резонанс. Демпфирование колебаний. Автоколебания.

*Волны.* Распространение колебаний в однородной упругой среде. Поперечные и продольные волны. Уравнение плоской бегущей волны. Интерференция волн. Природа звука. Объективные и субъективные характеристики звука. Понятие об инфра- и ультразвуке, их использование в медицине и технике. Эффект Доплера.

## **II. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА**

*Введение.* Предмет молекулярной физики. Термодинамический и статистический подход к изучению макроскопических систем.

*Основные положения молекулярно-кинетической теории газов.* Идеальный газ. Уравнение состояния. Изопроцессы. Молекулярно-кинетическое истолкование температуры и давления. Барометрическая формула и распределение Больцмана. Явления переноса: диффузия, теплопроводность, внутреннее трение. Их проявление в природе и использование в технике (центрифугирование, термос, радиаторы теплосети).

*Основы термодинамики.* Формы обмена энергией. Термодинамическое равновесие. Равновесные и неравновесные состояния. Температура и ее измерение. Внутренняя энергия. Первое начало термодинамики. Уравнение теплового баланса. Теплоемкость идеального газа. Работа при изопроцессах. Адиабатический процесс. Обратимые и необратимые процессы. Второе начало термодинамики. Цикл Карно и его КПД. Принципы работы тепловых и холодильных машин.

*Реальные газы и жидкости.* Экспериментальные изотермы реального газа. Уравнение Ван-дер-Ваальса. Критическое состояние. Фазовые переходы. Теплота фазового перехода. Равновесие фаз. Насыщенные и ненасыщенные пары. Влажность. Кипение и конденсация. Поверхностное натяжение в жидкостях. Смачивание. Формула Лапласа. Капиллярные явления.

## **III. ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ**

*Введение.* Электрические явления в природе.

*Электростатика.* Два вида электрических зарядов. Дискретность заряда и закон сохранения заряда. Закон Кулона. Напряженность электрического поля. Поле точечного заряда. Принцип суперпозиции полей. Потенциальный характер электростатического поля и его потенциал. Связь между потенциалом и напряженностью поля. Проводники и диэлектрики в электрическом поле. Электроемкость. Конденсаторы и способы их соединения. Энергия конденсатора. Энергия электростатического поля. Электростатическая защита.

*Постоянный ток.* Понятие об электрическом токе. Постоянный ток и условия его существования. Закон Ома для однородного участка цепи. Закон Ома для неоднородного участка цепи. Сопротивление проводника. Сторонние силы. ЭДС источника тока. Закон Ома для замкнутой цепи. Разветвленные цепи. Правила Кирхгофа. Работа и мощность в цепи постоянного тока. Закон Джоуля-Ленца. КПД источника тока.



*Ток в различных средах.* Ток в металлах. Опыты Толмена и Стюарта. Основные положения классической электронной теории металлов. Зависимость сопротивления металлов от температуры. Понятие о сверхпроводимости. Электронагревательные элементы. Точечная электросварка. Ток в полупроводниках. Виды проводимости. Полупроводниковые диоды и их применение. Ток в электролитах. Электролиз и законы Фарадея. Применение электролиза для получения специальных покрытий и в производстве чистых металлов. Химические источники тока. Аккумуляторы. Ток в газах. Процессы ионизации и рекомбинации. Виды разрядов. Использование разрядов в технике. Электродуговая сварка. Ток в вакууме. Термоэлектронная эмиссия. Вакуумный диод. Электронно-лучевая трубка.

*Магнитное поле.* Магнитные явления в природе. Вектор магнитной индукции. Закон Био-Савара-Лапласа. Магнитное поле прямого и кругового тока. Закон полного тока. Магнитное поле соленоида. Магнитное поле Земли. Сила Ампера. Взаимодействие токов. Магнитный момент рамки с током. Электроизмерительные приборы. Движение заряда в магнитном поле. Сила Лоренца. Эффект Холла. Магнитное поле в веществе. Диа-, пара- и ферромагнетики. Магнитный поток. Опыты Фарадея. Закон электромагнитной индукции Фарадея, правило Ленца. Вихревые токи. Явления самоиндукции. Индуктивность. Энергия магнитного поля. Электромагнит.

*Переменный ток.* Квазистационарные цепи. Резистор, конденсатор, катушка индуктивности в цепи переменного тока. Закон Ома для цепи переменного тока. Мощность. Эффективные значения тока и напряжения. Получение переменного тока промышленной частоты. Применение переменного тока в технике. Трансформаторы.

*Электромагнитные колебания.* Колебательный контур. Собственные и затухающие колебания. Добротность контура. Вынужденные колебания. Резонанс. Электрические автоколебания.

*Электромагнитные волны.* Вихревое электрическое поле. Ток смещения. Уравнения Максвелла. Электромагнитные волны, их свойства и применение. Антенны. Передача энергии и информации. Радиолокация.

#### **IV. ОПТИКА**

*Введение.* Шкала электромагнитных волн. Свет как электромагнитная волна.

*Фотометрия.* Восприятие света и цвета глазом. Кривая спектральной чувствительности глаза. Основные энергетические и фотометрические величины и способы их измерения.

*Геометрическая оптика.* Распространение, отражение и преломление электромагнитных волн в приближении геометрической оптики. Полное внутреннее отражение. Световоды. Построение изображения в линзах и

зеркала. Формула линзы. Оптические приборы: микроскоп, телескоп, проекционный аппарат. Оптика глаза.

*Интерференция света.* Понятие о когерентности световых волн. Способы и условия наблюдения интерференции света. Опыт Юнга. Кольца Ньютона. Интерферометры. Просветление оптики.

*Дифракция света.* Принцип Гюйгенса-Френеля. Метод зон Френеля. Дифракция Френеля на круглом отверстии. Дифракция Фраунгофера на одной, нескольких щелях. Дифракционная решетка как спектральный прибор. Разрешающая способность оптических приборов.

*Поляризация и дисперсия света.* Естественный и поляризованный свет. Поляризаторы и анализаторы. Закон Малюса. Поляризация при отражении от диэлектрической поверхности, угол Брюстера. Двойное лучепреломление в оптически анизотропных средах. Дисперсия света. Опыты Ньютона. Скорость света в веществе. Призма как спектральный прибор.

*Квантовая оптика.* Тепловое излучение. Закон Кирхгофа. Спектральная плотность излучения черного тела. Формула Планка. Закон Стефана-Больцмана. Закон смещения Вина. Ограниченность классических представлений о свете. Развитие квантовых представлений. Фотоны. Фотоэффект и уравнение Эйнштейна. Фотоэлементы, фотоумножители и фоторезисторы. Физические принципы цифровой фотографии и волоконно-оптических линий связи.

## **V. ФИЗИКА АТОМА, АТОМНОГО ЯДРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ**

*Введение.* История развития представлений об атоме до начала XX века.

*Физика атома.* Опыты Резерфорда. Планетарная модель атома. Постулаты Бора. Квантовые числа. Спин. Принцип Паули. Электронные «оболочки» атомов. Периодическая система элементов Д.И. Менделеева. Спонтанное и вынужденное излучения. Лазеры. Тормозное и характеристическое рентгеновское излучение. Закон Мозли. Рентгеновский аппарат.

*Физика атомного ядра и элементарных частиц.* Состав и свойства ядра. Ядерные силы и их свойства. Радиоактивность. Природа  $\alpha$ -,  $\beta$ - и  $\gamma$ - излучения. Закон радиоактивного распада. Естественные источники радиоактивности. Биологическое воздействие радиоактивного излучения. Ядерные реакции. Дефект массы. Цепная реакция деления ядер. Ядерные реакторы. Термоядерный синтез. Элементарные частицы, их классификация и свойства.

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ.**

Естественнонаучная картина мира и научно-технический прогресс.

## ТЕМА 1

### КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ. РАБОТА И ЭНЕРГИЯ

#### § 1. Кинематика материальной точки

##### Материальная точка. Система отсчета. Радиус-вектор.

Кинематика изучает изменение положения материальных тел в пространстве с течением времени без учета причин, вызывающих это изменение.

Наиболее простым примером механического движения является движение материальной точки. **Материальная точка** – это тело, обладающее массой, размерами которого в данной задаче можно пренебречь. Можно ли конкретное тело рассматривать как материальную точку, зависит не от размеров тела, а от условия данной задачи. Например, изучая вращение Земли вокруг Солнца, можно считать ее материальной точкой. Но этого нельзя делать, если рассматривать суточное вращение Земли вокруг собственной оси.

Положение материальной точки в пространстве определяется по отношению к какому-либо другому произвольно выбранному телу. Одно тело или совокупность тел, которые мы условно считаем неподвижными и относительно которых рассматриваем движение других тел, называется **телом отсчета**. Для

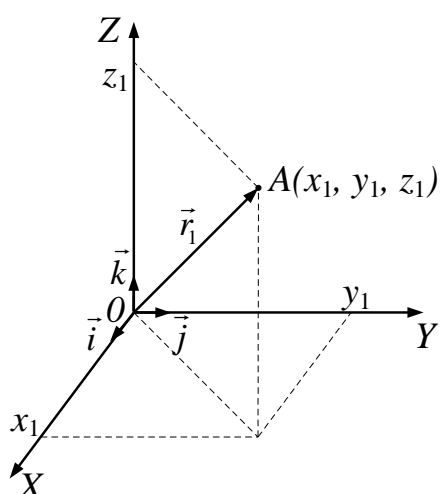


Рис.1.1

количественного описания движения с телом отсчета связываются система координат и часы. Наиболее часто используется декартова (прямоугольная) система координат; в ней положение точки  $A$  в данный момент времени характеризуется тремя координатами  $x_1$ ,  $y_1$  и  $z_1$  или радиус-вектором  $\vec{r}_1$ , проведенным из начала координат в данную точку (рис.1.1).

$$\vec{r}_1 = \vec{i}x_1 + \vec{j}y_1 + \vec{k}z_1, \quad (1.1)$$

где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – единичные векторы, определяющие положительные направления координатных осей;  $x_1, y_1, z_1$  – проекции радиус-вектора  $\vec{r}_1$  на оси координат. Совокупность тела отсчета, связанные с ним система координат и часы, называется **системой отсчета**.

##### Векторы перемещения, скорости и ускорения

**Траектория** движения материальной точки – это умозрительная совокупность точек пространства, через которые проходит материальная точка в

процессе своего движения. В зависимости от формы траектории движение может быть прямолинейным или криволинейным.

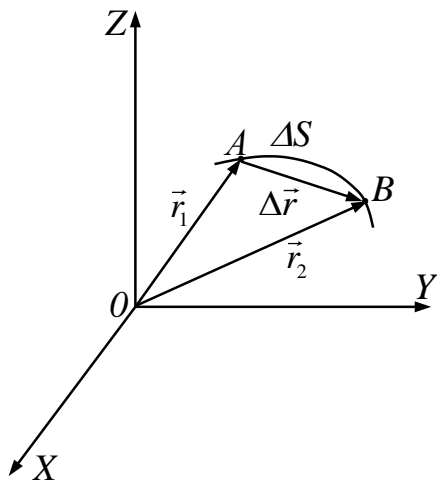


Рис.1.2

Если рассмотреть движение тела по произвольной траектории от точки  $A$  к  $B$  (рис.1.2), то длина участка траектории называется **длиной пути**  $\Delta S$  и является скалярной величиной. Вектор  $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ , проведенный из  $A$  в  $B$  (из начального положения точки в конечное), называется вектором **перемещения**. Отметим, что вектор перемещения  $\Delta \vec{r}$  в общем случае не совпадает с участком траектории  $\Delta S$ , кроме случая прямолинейного движения в одном направлении.

Рассмотрим **вектор элементарного перемещения**  $d\vec{r}$ , совершаемый точкой за элементарный промежуток времени  $dt$ . В этом случае пройденный путь – это длина дуги, которая стягивается вектором элементарного перемещения. Пройденный путь – скаляр, при элементарном перемещении абсолютная величина бесконечно малого перемещения равна бесконечно малому пройденному пути:

$$|d\vec{r}| = dS. \quad (1.2)$$

На практике часто нужно знать расстояние, пройденное материальной точкой вдоль траектории - длину пути  $\Delta S$  (рис. 1.2). Эта скалярная величина определяется арифметической суммой модулей элементарных перемещений:

$$\Delta S = \int_{m.A}^{m.B} dS = \int_{m.A}^{m.B} |d\vec{r}|. \quad (1.3)$$

Всякое перемещение происходит в пространстве и требует некоторого времени. Поэтому для характеристики движения материальной точки вводится векторная величина – **скорость**, которая определяет как быстроту движения, так и направление движения в данный момент времени:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (1.4)$$

Здесь  $\vec{v}$  – мгновенная скорость, т.е. скорость в данный момент времени и в данной точке траектории. Мгновенная скорость направлена по касательной к траектории:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i} \frac{dx}{dt} + \vec{j} \frac{dy}{dt} + \vec{k} \frac{dz}{dt} = \vec{i} v_x + \vec{j} v_y + \vec{k} v_z, \quad (1.5)$$

где  $v_x, v_y, v_z$  – проекции вектора скорости  $\vec{v}$  на оси координат.

Модуль вектора скорости:

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (1.6)$$

В случае неравномерного движения физической величиной, характеризующей быстроту изменения скорости по модулю и направлению, является ускорение:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (1.7)$$

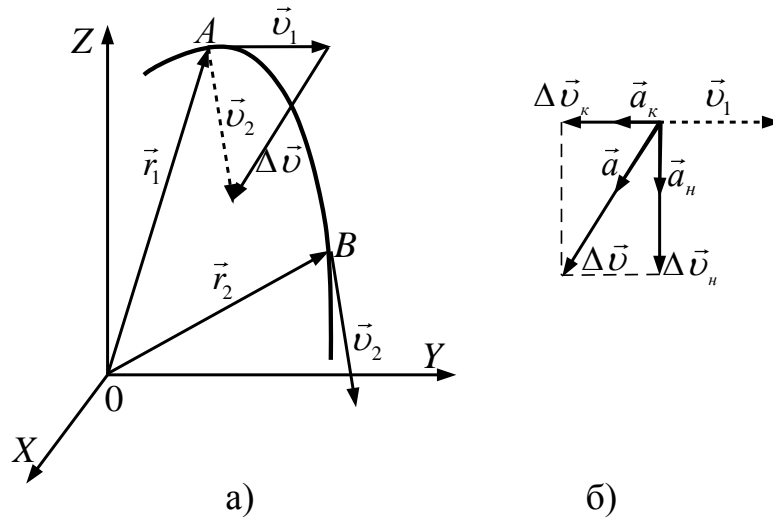


Рис.1.3

Если рассмотреть изменение скорости при движении тела от точки А к точке В (рис. 1.3а), то в начальный момент времени  $t$  (точка А) скорость равна  $\vec{v}_1$ , а в момент времени  $t + \Delta t$  (точка В) -  $\vec{v}_2$ , таким образом, изменение скорости равно  $\Delta \vec{v}$ :

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1.$$

Вектор ускорения  $\vec{a}$  направлен так же, как вектор изменения скорости  $\Delta \vec{v}$ .

На практике принято рассматривать проекции вектора  $\Delta \vec{v}$  не на оси координат, а на направление вдоль скорости  $\vec{v}$  и перпендикулярно к ней (рис. 1.3б). В этом случае говорят о **касательной**  $\Delta \vec{v}_k$  и **нормальной**  $\Delta \vec{v}_n$  составляющих вектора  $\Delta \vec{v}$ , причем  $\Delta \vec{v}_k$  определяет изменение только величины скорости, а  $\Delta \vec{v}_n$  - только изменение ее направления. Соответственно вводятся две составляющих полного ускорения – касательное (или тангенсальное) и нормальное:

$$\vec{a}_k = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}_k}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}_k}{dt},$$

$$\vec{a}_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}_n}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}_n}{dt}.$$

При этом 
$$\vec{a} = \vec{a}_\kappa + \vec{a}_n, \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_\kappa^2 + a_n^2}. \quad (1.8)$$

В произвольном случае, если  $\vec{a}_\kappa \neq 0$  и  $\vec{a}_n \neq 0$ , то  $\vec{a}$  составляет произвольный угол с вектором  $\vec{v}$ . Движение происходит по криволинейной траектории.

В частных случаях один из компонентов вектора  $\vec{a}$  может быть равен нулю, и этим будет определяться форма траектории.

Рассмотрим прямолинейное движение материальной точки ( $a_n=0$ ) вдоль оси  $OX$ .

1. Прямолинейное равномерное движение вдоль оси  $OX$  (так как скорость движения  $v$  не меняется со временем, то ускорение  $a$  равно нулю):

Пусть при  $t=0$   $v = v_0$  и  $x = x_0$ , тогда

$$x = \int_0^t v_0 dt = x_0 + v_0 t. \quad (1.9)$$

Представим полученные результаты в виде графиков зависимостей  $v(t)$  и  $x(t)$  (рис.1.4).

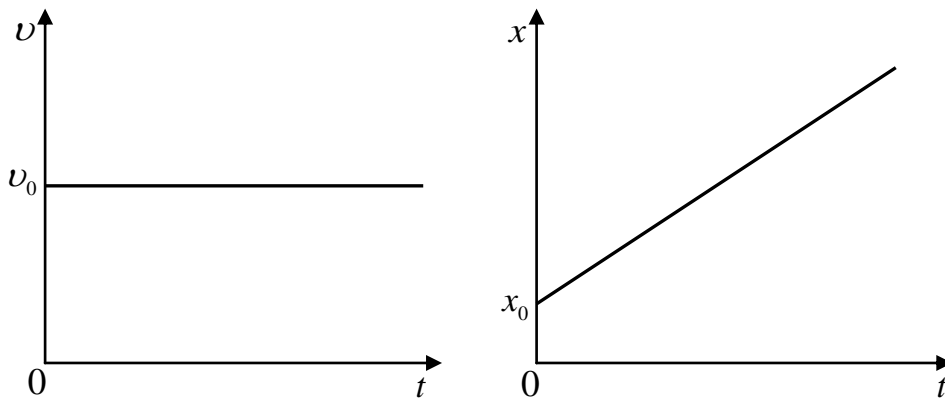


Рис.1.4

2. Равноускоренное прямолинейное движение вдоль оси  $OX$  (ускорение  $a$  не меняется со временем):  $a_x = const$ . Пусть при  $t = 0$ ,  $v = v_0$ ,  $x = x_0$ .

$$v_x(t) = \int_0^t a_x dt = v_0 + a_x t. \quad (1.10a)$$

$$x(t) = \int_0^t v_x dt = \int_0^t (v_0 + a_x t) dt = x_0 + v_0 t + \frac{a_x t^2}{2}. \quad (1.10б)$$

На рис.1.5. представлены графики  $a(t)$ ,  $v(t)$  и  $x(t)$ .

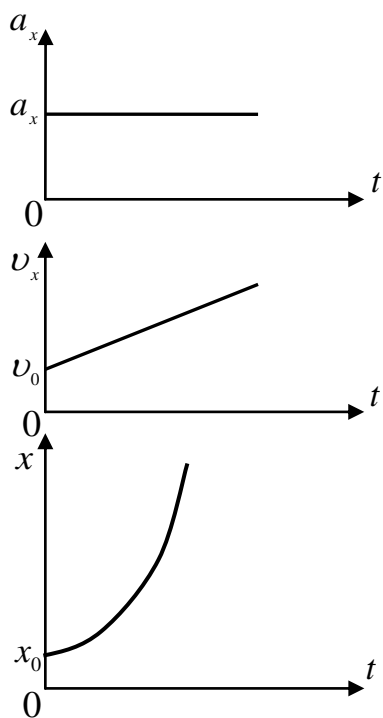


Рис.1.5

В полученных соотношениях  $x_0, v_0, a_x$  – алгебраические величины; они могут быть как положительными, так и отрицательными. В соответствии с этим  $x$  и  $v_x$  могут быть больше и меньше нуля. Заметим, что  $x$  – это не путь, а координата движущейся точки в выбранной системе координат, так как путь – это положительная величина.

**Движение по окружности. Нормальное, касательное и полное ускорения. Угловые и линейные характеристики движения**

Рассмотрим движение материальной точки вокруг неподвижной оси  $O$ . За промежуток времени  $\Delta t$  точка перемещается на величину  $\Delta \vec{r}$ , пройдя путь по дуге окружности  $\Delta S$ , т.е. радиус-вектор точки повернулся на угол  $\Delta \varphi$  (рис.1.6).

Если промежуток времени  $dt$  бесконечно мал, то

$$|d\vec{r}| = dS = r d\varphi.$$

Тогда линейная скорость рассматриваемой материальной точки (в скалярной форме):

$$|\vec{v}| = \frac{|d\vec{r}|}{dt} = r \frac{d\varphi}{dt} = r\omega, \tag{1.11}$$

где  $\omega = d\varphi/dt$  – угловая скорость. Она определяется углом поворота радиус-вектора в единицу времени.

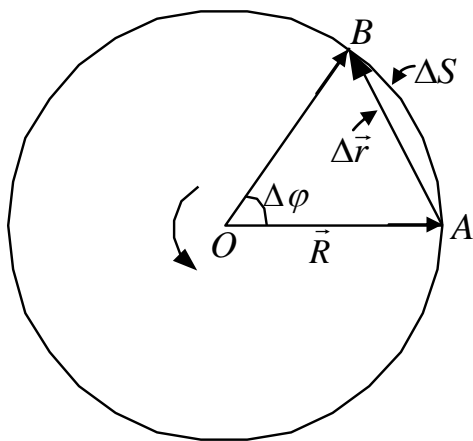


Рис.1.6

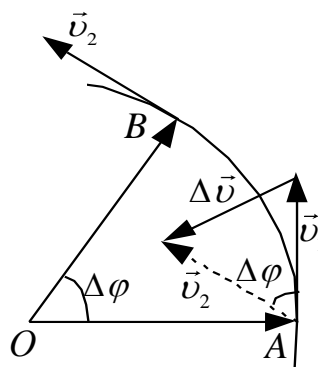


Рис.1.7

Если угловая скорость постоянна, то, как следует из (1.11), величина модуля линейной скорости не меняется. В этом случае говорят о «равномерном вращении», для которого характерно также постоянство **периода** вращения – времени полного оборота:

$$T = 2\pi R/v = 2\pi/\omega. \quad (1.12)$$

Не следует, однако, забывать, что движение точки по окружности является в принципе **ускоренным**, так как скорость меняется по направлению, т.е. нормальное ускорение  $a_n$  не равно нулю.

Чтобы найти нормальное ускорение, рассмотрим величину изменения скорости  $\Delta v$  (рис. 1.7):

$$\begin{aligned} \Delta v &= v \Delta\varphi, \\ a_n &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v\omega = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R. \end{aligned} \quad (1.13)$$

В этом случае,  $a = a_n$ .

Если движение по окружности неравномерное, то, кроме  $a_n$ , выражение для которого не изменяется, следует учесть изменение касательной составляющей скорости  $\Delta v_k = R\Delta\omega$ , т.е. касательное ускорение:

$$a_k = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_k}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R\Delta\omega}{\Delta t} = R \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon R. \quad (1.14)$$

Здесь  $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$  – угловое ускорение, характеризующее изменение угловой скорости в единицу времени.

Модуль полного ускорения в общем случае равен:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\varepsilon R)^2 + (\omega^2 R)^2}. \quad (1.15)$$

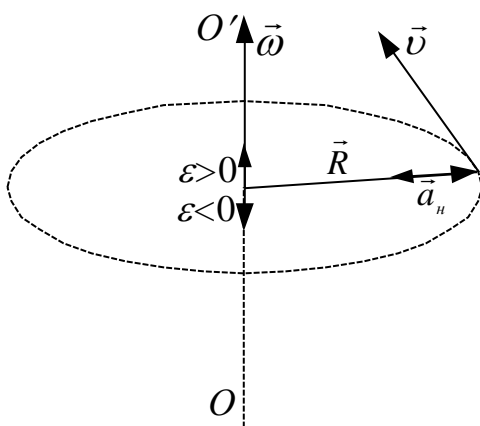


Рис.1.8

Помимо величины угловой скорости и углового ускорения, важно знать направление вращения материальной точки. Для этого угловую скорость изображают вектором  $\vec{\omega}$ , направленным вдоль оси вращения; а связь с направлением вращения устанавливают, пользуясь правилом правого винта (рис.1.8.).

Если вращение ускоренное (тело раскручивается), т.е.  $\varepsilon > 0$ , то  $\vec{\varepsilon} \uparrow \vec{\omega}$ .

Если вращение замедленное (тело замедляется), т.е.  $\varepsilon < 0$ , то  $\vec{\varepsilon} \downarrow \vec{\omega}$ .

Нормальное ускорение в векторной форме записывают:  $\vec{a}_n = -\omega^2 \vec{R}$ .



Знак « - » показывает, что  $\vec{a}$  всегда направлено по радиус-вектору к центру вращения.

Необходимость введения величин угловой скорости  $\vec{\omega}$  и углового ускорения  $\vec{\varepsilon}$  (наряду с линейными характеристиками  $\vec{v}$  и  $\vec{a}$ ) определяется тем, что угловые характеристики движения одинаковы для всех точек вращающегося тела, в отличие от  $\vec{v}$  и  $\vec{a}$ , которые зависят от расстояния точки до оси вращения.

Запишем кинематические соотношения для вращательного движения для нескольких распространенных случаев:

1) равномерное вращение ( $\varepsilon = 0$ ):

$$a_k = 0, a_n = \omega^2 R, \text{ при } t = 0, \varphi = \varphi_0, \omega = \omega_0$$

$$\varphi = \int_0^t \omega dt = \varphi_0 + \omega_0 t. \quad (1.16)$$

2) равнопеременное вращение:

$$a_k = \varepsilon R, a_n = \omega^2 R, \text{ при } t = 0, \varphi = \varphi_0, \omega = \omega_0, \varepsilon = \text{const}$$

$$\omega = \int_0^t \varepsilon dt = \omega_0 + \varepsilon t, \quad (1.17)$$

$$\varphi = \int_0^t \omega dt = \int_0^t (\varepsilon t + \omega_0) dt = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon t^2 / 2. \quad (1.18)$$

Графики зависимостей  $\varepsilon(t)$ ,  $\omega(t)$  и  $\varphi(t)$  аналогичны представленным на рис.1.4 и 1.5 графикам  $a(t)$ ,  $v(t)$  и  $x(t)$  соответственно, если обозначения ординат  $x$ ,  $v$ ,  $a$  на них поменять на величины  $\varphi$ ,  $\omega$ ,  $\varepsilon$ .

### Примеры решения задач

**Задача 1.1.** С аэростата, находящегося на высоте 300 м, упал камень. Через какое время камень достигнет земли, если: 1) аэростат неподвижен; 2) аэростат поднимается со скоростью 5 м/с; 3) аэростат спускается со скоростью 5 м/с. Соппротивлением воздуха пренебречь. Начертить графики зависимости высоты и скорости камня от времени  $t$  в случаях 1), 2), 3).

#### Анализ и решение

При решении этой и аналогичных задач используют координатный метод, в котором рассматривается зависимость координат тела  $x$ ,  $y$ ,  $z$  от времени.

Обратимся к условию задачи. Движение камня, выпавшего из аэростата, происходит по вертикали, т.е. является прямолинейным. В отсутствие сопротивления воздуха падение камня будет подчиняться законам равноускоренного движения с ускорением  $\vec{a} = \vec{g}$ , где  $\vec{g}$  - ускорение свободного падения. Выберем систему отсчета, направив ось  $Ox$  вертикально вверх и поместив начало отсчета на Землю в точку падения. В начальный момент

времени  $t = 0$  камень находился на высоте  $x_0 = H$  над поверхностью земли. Его начальная скорость относительно земли равна скорости аэростата.

Если аэростат неподвижен (случай 1), то начальная скорость камня  $v_0 = v_a = 0$ .

В выбранной системе координат, запишем закон, по которому будет меняться координата камня от времени при падении на землю:

$$x(t) = H - gt^2/2. \quad (1)$$

Знак « - » в (1) показывает, что ускорение  $\vec{g}$  направлено противоположно оси  $OX$ . В момент удара камня о землю его координата  $x = 0$ , а время  $t = t_{nad1}$ :

$$H = gt_{nad1}^2 / 2. \quad (2)$$

Отсюда  $t_{пад1} = \sqrt{2H/g} = 7,8с$ .

Зависимости  $x(t)$  и  $v(t)$  камня в этом случае иллюстрируют кривые 1) на рис.1.9.

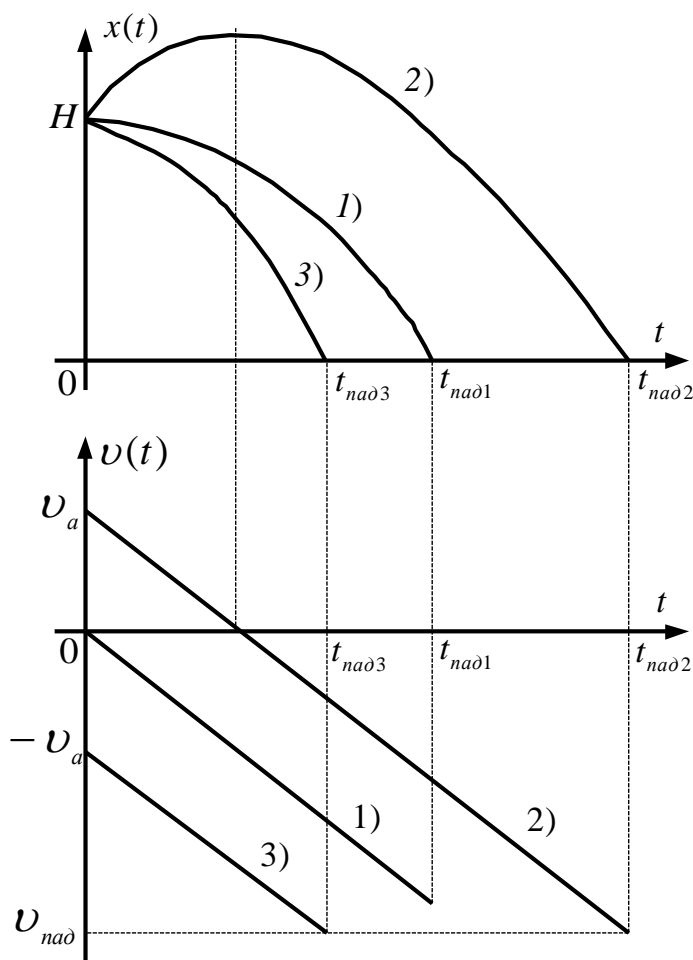


Рис.1.9

Рассмотрим случай 2. Так как аэростат поднимается со скоростью  $v_a$ , то при  $t = 0$  начальная скорость  $v_0$  камня будет равна скорости аэростата:

$$v_0 = v_a = 5 \text{ м/с.}$$

Запишем закон движения камня:

$$x(t) = H + v_0 t - gt^2/2. \quad (3)$$

При  $t=t_{nad2}$ ,  $x(t)=0$ . Тогда

$$\frac{gt_{nad2}^2}{2} - v_a t_{nad2} - H = 0. \quad (4)$$

Решив квадратное уравнение, получаем:

$$t_{nad2} = 8,4 \text{ с.}$$

Графики зависимости  $x(t)$  и  $v(t)$  камня от времени представлены на рис. 1.9 кривыми 2).

Рассуждая аналогично, запишем закон движения камня для случая 3:

$$x(t) = H - v_a t - \frac{gt^2}{2}. \quad (5)$$

Вычислим  $t_{nad3}$  камня, решив квадратное уравнение:

$$\frac{gt_{nad3}^2}{2} + v_a t_{nad3} - H = 0; t_{nad3} = 7,3 \text{ с.}$$

Графики зависимости  $x(t)$  и  $v(t)$  для случая 3 также приведены на рис.1.9.

Проанализируем зависимость  $x(t)$  и  $v(t)$  для различных случаев, рассмотренных в задаче. График зависимости  $v(t)$  – прямые линии, имеющие одинаковый наклон к оси времени; тангенс угла наклона графика  $v(t)$  к оси времени численно равен величине ускорения, а ускорение для случаев 1, 2, 3 одинаково и равно  $g$ . Пересечение графика  $v(t)$  для случая 2 с осью  $t$  соответствует моменту наивысшего подъема -  $v$  камня равна нулю. Значения скорости камня при ударе о землю в случаях 2 и 3, как это следует из кинематического решения задачи, равны.

К этому же выводу легко прийти, используя энергетический подход (см. § 3). Действительно, если принять за нулевой уровень отсчета потенциальной энергии поверхность Земли, можно (учтя отсутствие сопротивления воздуха) записать закон сохранения механической энергии для камня в поле тяжести Земли:

$$\frac{mv_a^2}{2} + mgH = \frac{mv_{nad}^2}{2}. \quad (6)$$

Для случаев 2 и 3 выражение (6) будет иметь один и тот же вид. Следовательно, скорость падения камня  $v_{nad}$  в обоих случаях одинакова.

**Задача 1.2.** Известна зависимость координаты  $x$  тела от времени  $t$ :  $x = At - Bt^2 + Ct^3$ , где  $A = 2$  м/с,  $B = 3$  м/с и  $C = 4$  м/с. Найти: 1)

зависимость скорости  $v$  и ускорение  $a$  от времени  $t$ ; 2)  $x$ ,  $v$  и  $a$  тела через 2 с после начала движения.

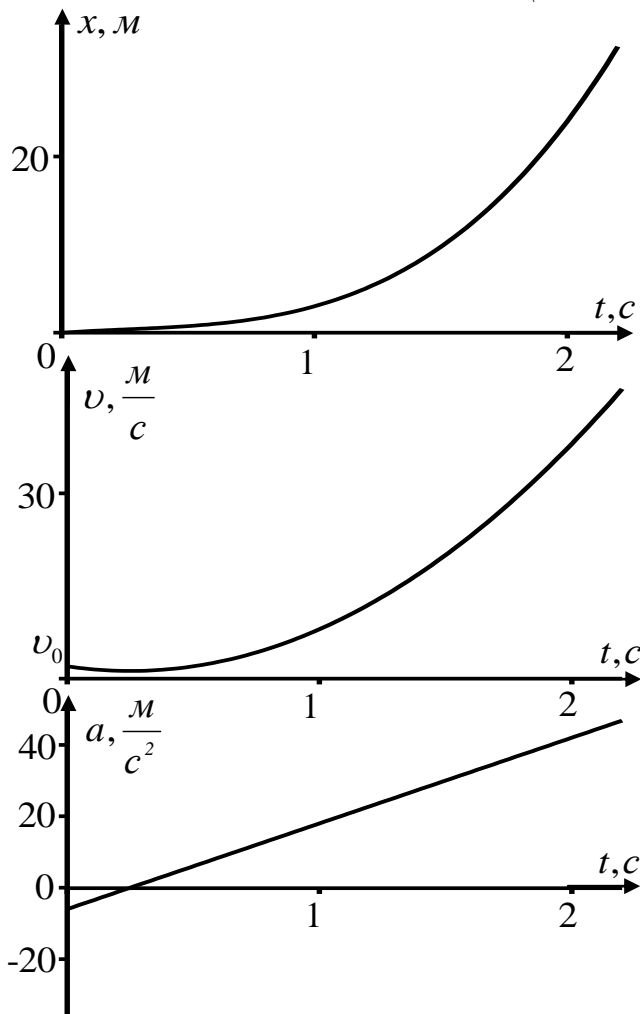
### Анализ и решение

Мгновенную скорость тела можно найти, продифференцировав зависимость координаты  $x(t)$  тела по времени:

$$v = dx/dt = A - 2Bt + 3Ct^2.$$

Подставляя  $A$ ,  $B$  и  $C$  из условия задачи, получим:

$$v = (2 - 6t + 12t^2) \text{ м/с}.$$



Соответственно ускорение получим, продифференцировав зависимость  $v(t)$  по времени:

$$a = dv/dt = (-2B + 6ct) \text{ м/с}^2.$$

Окончательно имеем:

$$a = (-6 + 24t) \text{ м/с}^2.$$

Полученные зависимости  $v$  и  $a$  от времени  $t$  позволяют сделать вывод, что рассматриваемое движение тела не является равноускоренным, так как ускорение  $a$  тела не постоянно, а зависит от времени. Скорость и ускорение тела при  $t = 0$  равны соответственно:

$$v_0 = A = 2 \text{ м/с}, a_0 = -12 \text{ м/с}^2.$$

На рис. 1.10 представлены графики зависимости  $x(t)$ ,  $v(t)$  и  $a(t)$ . Через  $t = 2$  с после начала движения координата, скорость и ускорение тела будут иметь иные значения:

Рис.1.10

$$x = 24 \text{ м}, v = 38 \text{ м/с}, a = 42 \text{ м/с}^2.$$

**Задача 1.3.** С башни высотой  $H = 25$  м горизонтально брошен камень со скоростью  $v_0 = 1,5$  м/с. Найти: 1) сколько времени камень будет лететь до земли; 2) на каком расстоянии  $S$  от основания башни он упадет на землю; 3) с какой скоростью  $v$ , и под каким углом  $\varphi$  к горизонту камень упадет на землю.

### Анализ и решение

В задаче рассматривается движение тела, брошенного горизонтально в поле тяжести земли. Если пренебречь влиянием силы сопротивления воздуха, то единственная сила, которая действует на тело во время его движения – сила тяжести, равная  $m\vec{g}$ ; она будет сообщать телу ускорение  $\vec{a} = \vec{g}$ . Наличие ускорения  $\vec{g}$ , направленного вертикально вниз, приведет к тому, что тело брошенное с горизонтальной скоростью относительно земли, через некоторое время  $t_{об}$  упадет на землю. Предположим, что кривая  $AB$  (рис. 1.11) является траекторией движения камня. Вектор скорости  $\vec{v}$  камня в любой момент времени направлен по касательной к траектории.

Это задача, как и задача 1.1, может быть решена с использованием координатного метода.

Движение тела, брошенного горизонтально, можно представить как результат сложения двух более простых движений: вдоль поверхности земли (горизонтальная ось  $OX$ ) и перпендикулярно этой поверхности (вертикальная ось  $OY$ ). При этом ось  $OY$  направим вертикально вверх, ось  $OX$  – по направлению начальной скорости  $v_0$ , а начало координат (т.  $O$ ) поместим на земле под точкой бросания. В горизонтальном направлении на камень силы не действуют, поэтому движение будет равномерным:

$$x = v_0 t. \quad (1)$$

Вдоль оси  $OY$  на камень действует сила тяжести. Поэтому зависимость координаты камня от времени по оси  $OY$  будет описываться уравнением:

$$y = H - gt^2 / 2, \quad (2)$$

а его скорость  $v_y = -gt$ , так как в точке  $A$  при  $t = 0$   $v_y = 0$ .

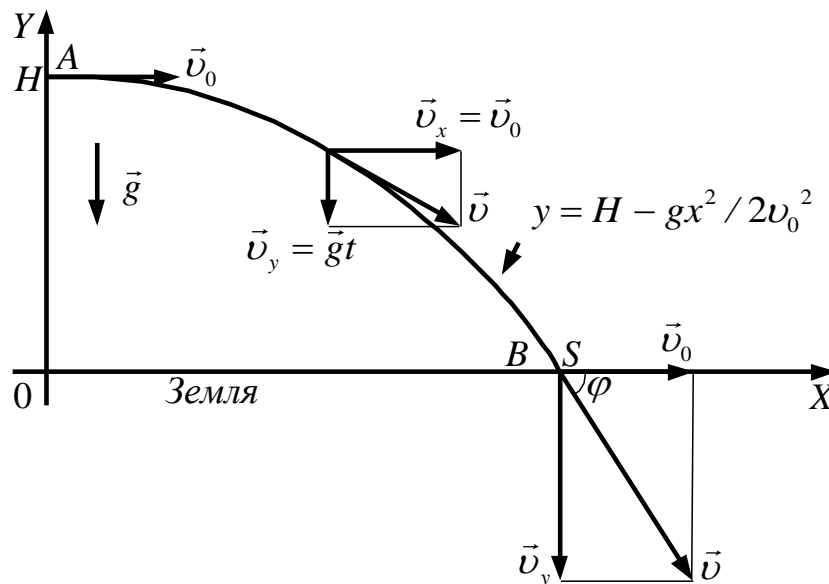


Рис.1.11

Точка  $A$ , соответствующая началу движения, имеет координаты  $x = 0$ ,  $y = H$  в момент  $t = 0$ .

Уравнения (1) и (2) справедливы для любой точки траектории и задают траекторию камня в параметрическом виде:  $x$  и  $y$  в зависимости от времени  $t$ .

Чтобы получить уравнение траектории камня в явном виде, нужно найти связь между его координатами  $x$  и  $y$  в произвольный момент времени  $t$ . Для этого выразим  $t$  из уравнения (1) и подставим в (2). Получим  $t = x/v_0$  и отсюда

$$y = H - gx^2 / 2v_0^2. \quad (3)$$

Выражение (3) – это уравнение траектории камня. Из него следует, что камень движется по параболе, вершина которой лежит на оси  $OY$ , а ветвь обращена вниз.

Воспользуемся этим выражением для определения дальности полета  $S$  камня. При падении камня на землю его координата  $y = 0$ , а координата  $x = S$ , тогда из (3) имеем

$$S = \sqrt{2Hv_0^2 / g} = v_0 \sqrt{2H / g}. \quad (4)$$

Сравнивая полученное выражение (4) с выражением (1), видим, что величина, равная  $\sqrt{2H / g}$ , есть время движения камня  $t_{\text{дв}}$ .

Возможен другой способ определения времени полета камня из уравнения (2). Так как при падении камня на землю  $y = 0$ , то из (2) получаем:

$$t_{\text{дв}} = \sqrt{2H / g}. \quad (5)$$

Найдем скорость камня  $v$  в точке  $B$  (см. рис.1.11). Она имеет две составляющие:  $v_x$  (по оси  $OX$ ) и  $v_y$  (по оси  $OY$ ). Следовательно,

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

Как указывалось выше,  $v_x = v_0$ , а  $v_y = -gt_{\text{дв}} = -\sqrt{2gH}$ , тогда

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gH}. \quad (6)$$

Угол  $\varphi$ , определяющий направление скорости камня при его падении на землю, найдем, пользуясь очевидным соотношением:

$$\text{tg} \varphi = v_y / v_x = \sqrt{2gH} / v_0. \quad (7)$$

Подставляя в выражения (4) - (7) данные из условия задачи, находим численные значения искомых величин:

$$t_{\text{дв}} = 2,3 \text{ с}; S = 34 \text{ м}; v = 27 \text{ м/с}; \varphi = 56^\circ.$$

**Задача 1.4.** Колесо радиусом 1 м, вращаясь равноускоренно, достигло угловой скорости  $\omega = 20$  рад/с через  $N = 10$  оборотов после начала вращения. Найти линейную скорость, полное, нормальное и тангенциальное ускорения точек обода колеса в этот момент времени; перемещение и путь точки обода колеса за это время.

## Анализ и решение

Рассмотрим равноускоренное вращение колеса. Зависимость угла поворота колеса  $\varphi$  от времени имеет вид:

$$\varphi(t) = \varepsilon \cdot t^2 / 2, \quad (1)$$

где  $\varepsilon$  – угловое ускорение колеса.

Зависимость угловой скорости  $\omega$  от  $t$  при равноускоренном вращении имеет вид:

$$\omega(t) = \varepsilon \cdot t. \quad (2)$$

Используя (1) и (2), можно записать:

$$\varphi(t) = \omega^2 / 2 \varepsilon. \quad (3)$$

По условию задачи колесо сделало 10 полных оборотов, т.е.  $\varphi = 2\pi N$ . Следовательно,  $2\pi N = \omega^2 / 2\varepsilon$ , а

$$\varepsilon = \omega^2 / 4 \pi N. \quad (4)$$

Линейная скорость, нормальное и касательное ускорения точек обода колеса связаны с угловой скоростью колеса соотношениями (1.11), (1.13) и (1.14).

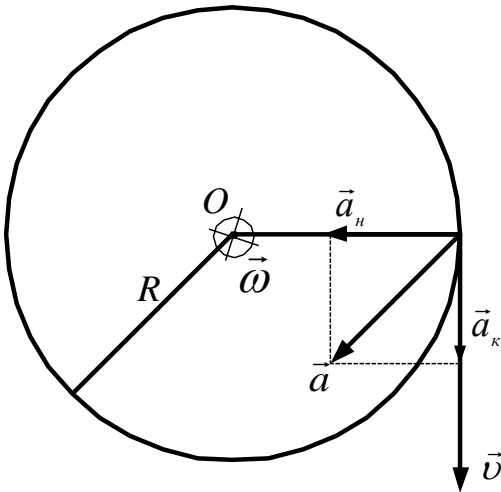


Рис.1.12

Полное ускорение  $a$  точек обода колеса в любой момент времени находим из (1.15).

Используя связь между угловыми и линейными характеристиками при вращении абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси, найдем перемещение  $\vec{r}$  и путь  $S$  точки обода колеса за указанный промежуток времени:  $\vec{r} = 0$ , так как каждая точка обода колеса совершила 10 полных оборотов вокруг оси, а  $S = 2\pi RN$ .

Подставив в (1.11) и (1.13) - (1.14) данные из условия задачи, найдем

численные значения искомых величин:

$$v = 20 \text{ м/с}; a_n = 400 \text{ м/с}^2; a_k = 3,18 \text{ м/с}^2; a = 400 \text{ м/с}^2; S = 62,8 \text{ м}.$$

На рис.1.12 показаны  $\vec{v}, \vec{a}_k, \vec{a}_n, \vec{a}$  для точки обода колеса при его равноускоренном вращении.

**Задача 1.5.** Два бумажных диска насажены на горизонтальную ось на расстоянии  $l = 0,5$  м друг от друга и вращаются с постоянной частотой  $n = 1600$  об/мин. Пуля, летящая вдоль оси, пробивает оба диска вблизи их обода. При этом оказывается, что отверстие от

пули во втором диске смещено относительно отверстия в первом диске на угол  $\varphi = 12^\circ$ . Найти скорость пули.

### Анализ и решение

В этой задаче описан так называемый «кинематический» метод измерения скорости полета пули. Считая, что между двумя дисками (рис.1.13) пуля летит равномерно (подумайте, при каких допущениях это возможно), можно найти время движения пули между дисками  $t$ , выразив его через расстояние  $l$  и скорость пули

$$t = l / v. \quad (1)$$

Однако за это время  $t$  равномерно вращающиеся диски повернутся на угол  $\varphi$  относительно друг друга, т.е:

$$t = \varphi / \omega, \quad (2)$$

где  $\omega = 2\pi n$ . Скорость полета пули найдем, приравняв выражения (1) и (2):

$$v = l\omega / \varphi. \quad (3)$$

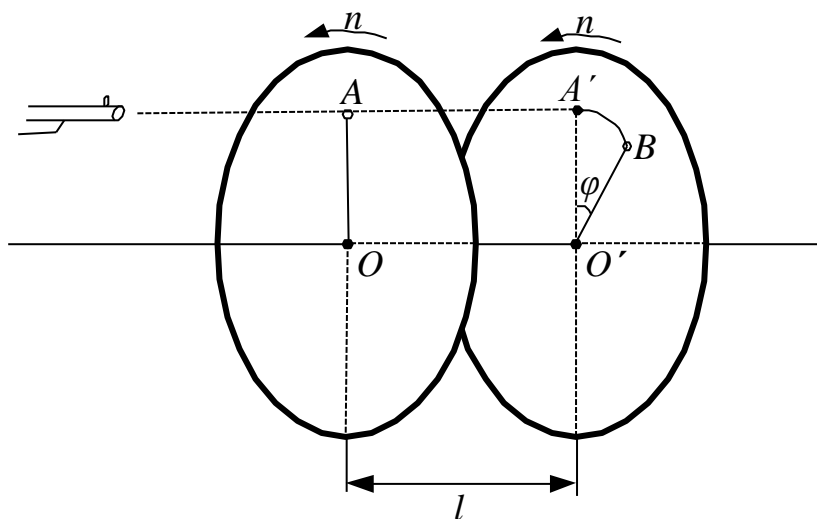


Рис.1.13

Произведем вычисления, предварительно переведя угол  $\varphi$  из градусов в радианы ( $\varphi = 12^\circ \pi / 180^\circ$ ), и получим:

$$v = 400 \text{ м/с.}$$

## § 2. Динамика материальной точки и системы материальных точек

**Динамика**, в отличие от кинематики, устанавливающая только связи между кинематическими величинами, рассматривает законы движения тел и те причины, которые его вызывают. В основе классической механики лежат три закона Ньютона.



## I закон Ньютона. Инерциальная система отсчета

Всякое тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, пока внешние воздействия (внешние силы) не выведут его из этого состояния. Это явление называется инерцией. В связи с этим первый закон Ньютона часто называют законом инерции.

Так как состояние покоя или равномерного движения имеет смысл только по отношению к определенной **системе отсчета**, I закон Ньютона утверждает, что существуют системы отсчета, в которых свободное тело движется равномерно и прямолинейно. Такие системы называют инерциальными системами отсчета (ИСО). Любая система, движущаяся равномерно и прямолинейно относительно ИСО, также является инерциальной. Согласно **принципу относительности Галилея**, во всех инерциальных системах отсчета законы механики одинаковы.

## II закон Ньютона. Сила. Масса. Импульс

I закон Ньютона не дает количественного соотношения между воздействием на тело окружающих его (или внешних) тел и изменением состояния самого тела. Для описания такого воздействия вводится понятие **силы**. При этом под силой понимается количественная характеристика взаимодействия между телами, она является вектором.

Можно дать такую формулировку II закона Ньютона: ускорение, получаемое телом, прямо пропорционально действующей силе и обратно пропорционально массе тела:

$$\vec{a} = \vec{F} / m. \quad (1.19)$$

Или: результирующая сила, действующая на тело, равна произведению массы тела на его ускорение:

$$\vec{F} = m\vec{a}. \quad (1.20)$$

**Масса** является мерой инертности тела: тело с большей массой обладает большей инертностью и под влиянием той же силы получает меньшее ускорение, чем тело с меньшей массой.

Приведенная выше формулировка II закона Ньютона фактически содержит предположение о постоянстве массы. Можно привести более общую запись II закона, сделанную самим Ньютоном.

Действительно, из опыта хорошо известно, что изменение скорости тела происходит в направлении действия силы и пропорционально приложенной силе и времени ее воздействия:

$$\vec{F}\Delta t = m\Delta\vec{v}. \quad (1.21)$$

Учитывая, что  $m\Delta\vec{v} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \Delta(m\vec{v})$ , можно записать:

$$\vec{F}\Delta t = \Delta(m\vec{v}) = \Delta\vec{p}. \quad (1.22)$$

Векторная величина  $\vec{p} = m\vec{v}$ , характеризующая состояние тела, называется **механическим импульсом** движущегося тела. (Ньютон использовал не совсем удачный термин «количество движения».) Импульс – одна из важнейших физических величин.

Чтобы перейти к записи II закона в формулировке Ньютона,  $\Delta\vec{p}$  разделим на  $\Delta t$  и перейдем к пределу:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}.$$

Скорость изменения механического импульса пропорциональна действующей силе и имеет с ней одинаковое направление.

Если же на тело действует несколько сил, то изменение импульса определяется векторной суммой сил:

$$\sum_i \vec{F}_i = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

### III закон Ньютона

В этом законе подчеркивается, что силы, действующие на тела, всегда носят характер взаимодействия. III закон гласит: силы взаимодействия, испытываемые двумя материальными точками, равны по модулю, противоположны по направлению и действуют вдоль прямой, соединяющей эти точки.

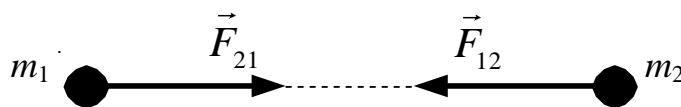


Рис.1.14

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21},$$

где  $\vec{F}_{12}$  и  $\vec{F}_{21}$  – силы, приложенные к разным материальным точкам  $m_1$  и  $m_2$ .

Законы Ньютона применимы к силам любой природы, нужно лишь знать

модуль силы и ее направление.

### Применение законов Ньютона к простейшим задачам механики

II закон Ньютона (1.20) является основным уравнением классической динамики и его принято называть уравнением движения. Из уравнения движения, зная в явном виде зависимость силы  $F$  от координаты  $x$ , скорости  $v$  и

времени  $t$ , можно найти закон движения тела, т.е. определить зависимости  $a$ ,  $v$  и  $x$  от времени в этом случае.

В качестве простого примера рассмотрим одномерное движение тела вдоль оси  $OX$ , полагая, что сила  $F$ , действующая на это тело постоянна и равна  $F_0$

$$F(x, v, t) = F_0 = \text{const.}$$

Пусть при  $t = 0$ ,  $x_0 = 0$  и  $v_0 = 0$ .

Тогда уравнение движения имеет вид:

$$ma = F_0$$

или учитывая, что  $a = \frac{d^2x}{dt^2}$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_0.$$

Ускорение тела:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = F_0 / m = \text{const.}$$

Скорость:

$$v = \int_0^t a dt = F_0 t / m = a \cdot t.$$

Перемещение:

$$x = \int_0^t v dt = F_0 t^2 / 2m = at^2 / 2.$$

**Вывод:** под действием постоянной силы тело всегда движется равноускоренно.

### А. Вес и невесомость

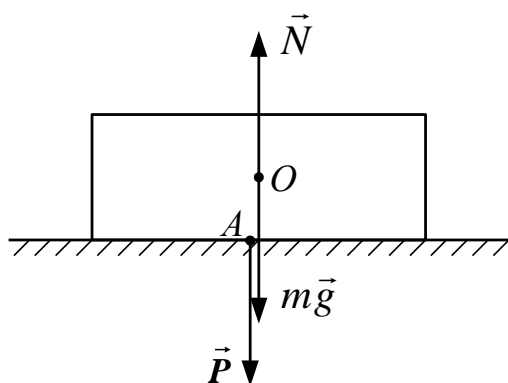


Рис.1.15

Если тело покоится на опоре (рис.1.15), то это означает, что сумма действующих на него сил равна нулю:

$$\vec{F}_{рез} = 0.$$

На любое тело на Земле действует сила тяжести  $m\vec{g}$  и, чтобы  $\vec{F}_{рез} = 0$ , нужна сила, равная  $\vec{F}_{тяж}$ , но направленная в противоположную сторону – вертикально вверх.

Эта сила – реакция опоры  $\vec{N}$ , т.е. упругая сила, действующая на тело вследствие деформации опоры. Итак:

$$\vec{N} + m\vec{g} = \vec{F}_{\text{рез}} = 0.$$

Отсюда

$$\vec{N} = -m\vec{g}.$$

Сила, с которой тело вследствие притяжения к Земле действует на опору (т.А, рис.1.15) или подвес, называется весом тела  $\vec{P}$ . Векторы  $\vec{P}$  и  $\vec{N}$  приложены к разным телам, но всегда равны по модулю. Если тело движется с ускорением, направленным вертикально, то  $\vec{N}$  и, как следствие  $\vec{P}$ , могут быть больше или меньше  $m\vec{g}$ . Этот вопрос подробно разбирается в задаче (1.7).

В частности, при  $a = g$  тело перестает взаимодействовать с опорой, т.е. и вес тела  $\vec{P}$ , и реакция опоры  $\vec{N}$  обращаются в нуль. В этом случае говорят, что тело находится в состоянии невесомости.

### **Б. Явление невесомости на спутнике**

Спутник находится в поле тяготения Земли. Если расстояние его от поверхности Земли относительно невелико ( $h \ll R_3$ , где  $R_3$  – радиус Земли), то можно считать, что сила тяготения  $\vec{F} = m\vec{g}$ , ( $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ ).

Спутник движется по круговой траектории, и нормальное ускорение создается только силой тяготения:

$$ma_n = m \cdot v^2 / R_3 = mg.$$

Отсюда  $v = \sqrt{gR_3}$  - это первая космическая скорость, примерно равная  $v_{кл} = 7,9 \text{ км/с}$ .

Ускорение спутника равно  $a=g$ , следовательно, и сам спутник, и все вращающиеся вместе с ним тела все время находятся в состоянии невесомости.

## **Замкнутые механические системы. Закон сохранения импульса**

Из II закона Ньютона следует, что у свободно движущейся материальной точки ( $\vec{F} = 0$ ) импульс не изменяется:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = 0, \quad \vec{p} = const.$$

Пусть имеется не одна материальная точка, а система точек, взаимодействующих друг с другом, но не взаимодействующих ни с какими внешними телами.

Такую систему называют **изолированной**, или **замкнутой**.

Запишем для каждой материальной точки, входящей в систему, второй закон Ньютона:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{p}_1}{dt} &= \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{41} + \dots + \vec{F}_{n1}, \\ \frac{d\vec{p}_2}{dt} &= \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} + \vec{F}_{42} + \dots + \vec{F}_{n2}, \\ &\text{-----} \\ \frac{d\vec{p}_n}{dt} &= \vec{F}_{1n} + \vec{F}_{2n} + \vec{F}_{3n} + \dots + \vec{F}_{n-1,n}.\end{aligned}\tag{1.23}$$

(Здесь  $\vec{F}_{n1}$  - сила, действующая со стороны  $n$ -ой точки на первую.)

Подчеркнем еще раз, что в уравнениях (1.23) есть только внутренние силы; внешних сил нет, т.е. система материальных точек замкнута.

Сложив левые и правые части (1.23), получим

$$\sum_{i=1}^n \frac{d\vec{p}_i}{dt} = 0.\tag{1.24}$$

Ноль в правой части (1.24) получен на основании III закона Ньютона, согласно которому  $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$  (например,  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ ), т.е. в замкнутой системе сумма внутренних сил равна нулю.

Таким образом, из соотношения (1.24) следует, что полный импульс замкнутой системы  $\vec{p}_c$  – величина постоянная (сохраняется):

$$\vec{p}_c = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n = const.$$

Это один из важнейших в физике законов сохранения – закон сохранения импульса. Из приведенных выше соотношений (1.23) и (1.24) видно, что никакие внутренние взаимодействия не могут изменить полный импульс системы.

Полный импульс системы может быть изменен только при взаимодействии с внешними по отношению к системе телами. Причем именно скорость изменения импульса определяет внешнюю силу:

$$\frac{d\vec{p}_c}{dt} = \vec{F}_{\text{внешн}}.\tag{1.25}$$

Уравнение (1.25) – векторное, поэтому вместо него можно рассматривать 3 скалярных уравнения для проекций векторов на три координатные оси:

$$dp_{cx}/dt = F_x, \quad dp_{cy}/dt = F_y, \quad dp_{cz}/dt = F_z.$$

Если внешняя сила направлена вдоль какой-либо координатной оси (допустим OZ), то компонент импульса вдоль оси Z ( $p_{cz}$ ) будет изменяться, но при этом  $p_{cx}$  и  $p_{cy}$  сохраняются. Таким образом, при движении под действием такой постоянной силы полный импульс не сохраняется, но сохраняются его проекции на направления, перпендикулярные внешней силе:  $\vec{p}_c \neq const$ , но  $p_{cx} = const$  и  $p_{cy} = const$ .

У горизонтально брошенного тела с начальной скоростью  $v_0$  будет сохраняться горизонтальная проекция импульса ( $p_x$ ), т.к. проекция силы тяжести  $m\vec{g}$  на это направление равна нулю ( см. рис.1.16 и задачу 1.3).

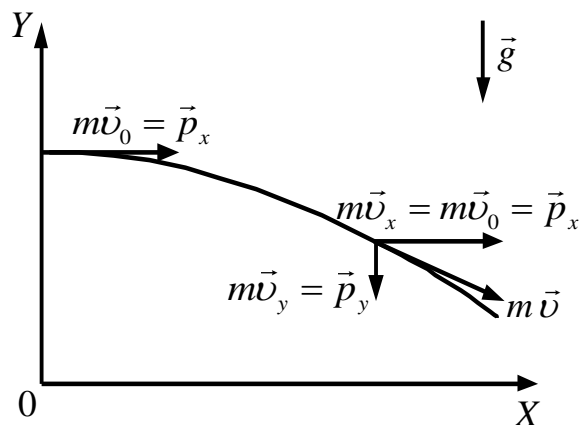


Рис.1.16

**Центром масс** (или центром инерции системы материальных точек) называется воображаемая точка  $C$ , положение которой характеризует распределение масс в этой системе, и радиус-вектор, который равен

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{m}, \quad (1.26)$$

где  $m_i$  и  $r_i$  – масса и радиус-вектор  $i$ -той материальной точки;  $n$  – число

материальных точек системы;  $m$  – масса всей системы.

Для симметричных однородных тел положение центра масс совпадает с центром симметрии.

Из (1.26) путем дифференцирования по времени можно получить, что импульс системы материальных точек равен произведению массы системы на скорость ее центра масс  $v_c$ :

$$\vec{p}_c = m\vec{v}_c, \quad (1.27)$$

т.е. центр масс системы движется как материальная точка, в которой сосредоточена масса всей системы и на которую действует сила, равная сумме всех внешних сил  $\vec{F}_{рез}$ , действующих на систему:

$$m \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{F}_{рез}. \quad (1.28)$$

Из закона сохранения импульса следует, что **центр масс движется равномерно** и прямолинейно (в частном случае покоится), если система замкнута.

### § 3. Работа и энергия

#### Работа силы. Консервативные и диссипативные силы

Изменение характера механического движения тела вызывается силами, действующими на него со стороны других тел. Если сила действует в течение некоторого времени, то для определения конечного результата этого действия вводится понятие **работы силы**.

Если тело (материальная точка) движется вдоль некоторой траектории между точками 1 и 2 под действием силы  $\vec{F}$ , то на длине элементарного перемещения  $d\vec{r}$  (элементарное перемещение и элементарный пройденный путь совпадают) совершается элементарная работа  $dA$ :

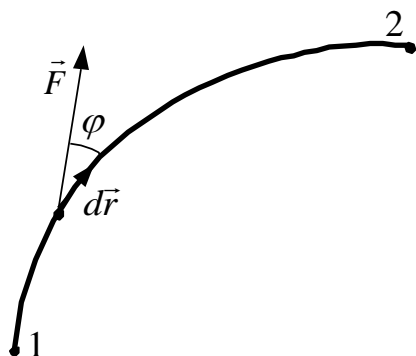


Рис.1.17

$$dA = (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = F dr \cos \varphi = F_r \cdot dr, \quad (1.29)$$

где  $\varphi$  – угол между  $\vec{F}$  и  $d\vec{r}$ ,  $F_r = |\vec{F}| \cdot \cos \varphi$  – проекция силы  $\vec{F}$  на направление вектора  $d\vec{r}$ .

$dA$  максимально, если  $\varphi=0$  ( $\vec{F} \parallel d\vec{r}$ ) и  $dA=0$ , если  $\varphi=\pi/2$  ( $\vec{F} \perp d\vec{r}$ ), т.е. сила, перпендикулярная перемещению, работы не совершает. Когда  $\varphi < \pi/2$ , то  $dA > 0$ , и говорят, что сила совершает работу. Если же  $\varphi > \pi/2$ , то  $dA < 0$ , и тело производит работу против внешних сил.

Работа переменной силы на всем пути между точками 1 и 2 (рис. 1.17) равна сумме элементарных работ:

$$A = \int_1^2 (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = \int_1^2 F_r dr. \quad (1.30)$$

Если  $\vec{F}$  при движении не изменяется, то в (1.30) его можно вынести за знак интеграла:

$$A = \int_1^2 F_r dr = F \cos \alpha \int_1^2 dr = FS_{12} \cos \alpha.$$

Все силы, с которыми мы встречаемся в механике, могут быть разделены на две группы: **консервативные** и **диссипативные**.

Если работа силы не зависит от формы пути, а определяется только начальным и конечным положением тела, то такие силы называются консервативными. Результатом действия консервативных сил может быть изменение механического состояния системы, т.е. относительных положений и скоростей её частей. Примерами консервативных сил в механике могут служить сила тяготения и сила упругости.

Если же работа, совершаемая силой, зависит от траектории, по которой происходит перемещение тела из одной точки в другую, то такие силы называют диссипативными. В результате действия диссипативных (неконсервативных) сил, кроме механических изменений, в системе происходят и немеханические изменения, в частности нагревание частей системы. Примером диссипативных сил является сила трения.

## Кинетическая энергия

Кинетическая энергия тела – часть полной механической энергии тела. Она является мерой его механического движения и определяется работой, которую необходимо совершить, чтобы вызвать данное движение тела.

Пусть сила  $\vec{F}$  действует на покоящееся тело массы  $m$  (при  $t=0$ ,  $v=0$ ). Элементарная работа, которую совершит сила  $\vec{F}$  на пути  $dr$  (считаем для простоты движение прямолинейным и направление силы – вдоль перемещения), равна:

$$dA = Fdr = m \frac{dv}{dt} dr = m \frac{dr}{dt} dv = mvdv \quad (1.31)$$

и определяет элементарное изменение кинетической энергии  $dK$ :

$$dA = dK = mvdv.$$

Тогда полная кинетическая энергия равна:

$$K = \int_0^v mvdv = mv^2 / 2 = p^2 / 2m \quad (1.32)$$

(как известно, импульс  $p=mv$ ).

Из формулы (1.32) видно, что кинетическая энергия зависит только от массы и скорости тела, т.е. кинетическая энергия системы – функция состояния её движения.

### Потенциальная энергия и её связь с силой

Потенциальная энергия – часть полной механической энергии тела. Она определяется взаимным расположением окружающих его тел и характером сил взаимодействия между ними.

Пусть в некоторой области пространства действуют консервативные силы, т.е. существует некоторое поле консервативных сил. Оно получило название потенциального. Тело, находясь в потенциальном поле, обладает потенциальной энергией  $\Pi$ .

Потенциальная энергия тела определяется работой, которую совершили бы действующие на тело внешние силы, перемещая его из точки, где потенциальная энергия его равна нулю, в данную точку поля:

$$d\Pi = -dA \quad \text{или} \quad -d\Pi = dA \quad (1.33)$$

(работа совершается против сил поля).

Если известна потенциальная энергия поля как функция координат, то работу перемещения из точки 1 в точку 2 можно найти как разность потенциальных энергий частицы в начальной и конечной точках:

$$A_1 = -\Pi_1 \quad \text{и} \quad A_2 = -\Pi_2,$$

где  $A_1$  и  $A_2$  – работа по перемещению частицы из бесконечности в точки 1 и 2, соответственно. Тогда

$$A_{1 \rightarrow 2} = A_2 - A_1 = \Pi_1 - \Pi_2. \quad (1.34)$$

Если точки 1 и 2 расположены близко, то



$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

где  $d\vec{r}$  – вектор элементарного перемещения.

С другой стороны,

$$d\Pi = -dA = -\vec{F}d\vec{r}, \quad (1.35)$$

отсюда в скалярной форме

$$F = -\frac{d\Pi}{dr}. \quad (1.36)$$

Вектор силы  $\vec{F}$  показывает, по какому направлению надо двигаться, чтобы потенциальная энергия частицы в поле убывала наиболее быстро, и какова величина этого убывания при перемещении на единицу пути.

### Закон сохранения механической энергии

Закон сохранения механической энергии – результат обобщения многих экспериментальных данных.

Получим закон сохранения механической энергии, рассматривая поле консервативных сил. Выше было показано, что

$$d\Pi = -dA. \quad (1.37)$$

С другой стороны, нам известно, что работа силы равна изменению кинетической энергии тела:

$$dA = mv dv. \quad (1.38)$$

Если (1.38) подставить в (1.37), получим:

$$d\Pi + mv dv = d(\Pi + mv^2 / 2) = 0.$$

Откуда (так как  $K=mv^2/2$ ) следует, что

$$\Pi + K = const. \quad (1.39)$$

Итак, работа, совершаемая консервативными силами, приводит к увеличению кинетической энергии частицы. Потенциальная энергия при этом убывает. Это – закон сохранения механической энергии.

В замкнутой системе тел, между которыми действуют только консервативные силы, механическая энергия сохраняется, т.е. не изменяется со временем.

В замкнутой системе, в которой наряду с консервативными действуют силы трения, полная механическая энергия при движении убывает. Закон сохранения механической энергии в этом случае несправедлив, поскольку механическая энергия частично переходит в тепловую за счет работы силы трения. Однако закон сохранения энергии выполняется, поскольку энергия никогда не исчезает и не появляется вновь, она лишь переходит из одного вида в другой.

## Примеры решения задач

**Задача 1.6.** Два тела с массами 0,1 кг соединены нерастяжимой нитью, которая переброшена через неподвижный блок. На одно из тел положили перегрузок  $\Delta m$ . Система пришла в движение, и за  $t_1 = 1$  с каждое тело переместилась на  $l = 1,0$  м.

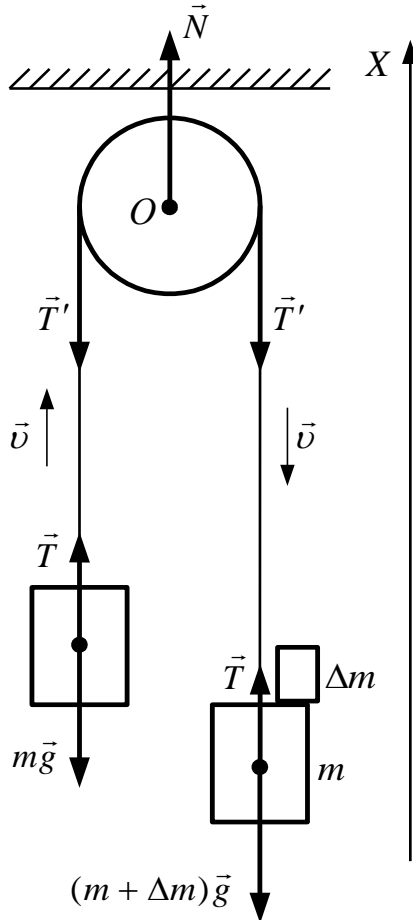


Рис.1.18

Найти ускорение грузов, натяжение нити и давление на ось блока. Массой нити, блока и трением нити о блок и блока в оси пренебречь.

### Анализ и решение

Для анализа задачи необходимо сделать чертеж, изобразив на нем силы, действующие на оба тела и блок (рис.1.18).

Систему координат свяжем с землей, а ось  $X$  направим вертикально вверх.

Рассмотрим силы, действующие на каждое тело в отдельности, и применим к ним II закон Ньютона. Так как по условию задачи нить нерастяжима, а также она и блок невесомы, то ускорение обоих тел по модулю одинаковы. На блок действуют силы натяжения со стороны нити с грузами  $\vec{T}'$  и сила реакции  $\vec{N}$  оси блока.

Применим II закон Ньютона к каждому телу:

$$\begin{cases} 2\vec{T}' + \vec{N} = 0, \\ m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}, \\ m\vec{g} + \Delta m\vec{g} + \vec{T} = (m + \Delta m)\vec{a}. \end{cases}$$

Так как по условию задачи ось блока неподвижна, нить нерастяжима и трением нити о блок и блока в оси мы пренебрегаем, то  $T' = -T$ . Перейдем к скалярному виду законов, взяв проекции сил и ускорений. Тогда в проекциях на ось  $X$  система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} -2T + N = 0, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -mg + T = ma, & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -(m + \Delta m)g + T = -(m + \Delta m)a. & (3) \end{cases}$$

Получим систему из трех уравнений с 4 неизвестными величинами  $N, T, a, \Delta m$ . Необходимо дополнить эту систему еще одним кинематическим соотношением. Так как движение грузов равноускоренное (равнодействующая сил, действующих на каждое тело, – постоянная величина), то перемещение  $\Delta x$  за время  $\Delta t_1$  равно

$$\Delta x = l = at_1^2 / 2. \quad (4)$$

Окончательно получили 4 уравнения с 4 неизвестными. Из (1) - (4) имеем:

$$a = \frac{2l}{t_1^2}, T = m(g+a), N = 2T = 2m(g+a).$$

Подставив численные данные из условия задачи, получим:

$$a = 2 \text{ м/с}^2, T = 1,2 \text{ Н}, N = 2,4 \text{ Н}.$$

**Задача 1.7.** В лифте установлен динамометр, на котором подвешено тело массой  $m = 1$  кг. Что будет показывать динамометр, если: 1) лифт движется вверх с ускорением  $a_1 = 4,9$  м/с<sup>2</sup>, направленным вверх; 2) лифт движется вверх с ускорением  $a_2 = 4,9$  м/с<sup>2</sup>, направленным вниз; 3) лифт движется вниз с ускорением  $a_3 = 2,45$  м/с<sup>2</sup>, направленным вверх; 4) лифт движется вниз с ускорением  $a_4 = 2,45$  м/с<sup>2</sup>, направленным вниз; 5) лифт движется вверх с постоянной скоростью.

### Анализ и решение

Изобразим на чертеже (рис. 1.19) силы, действующие на тело, подвешенное к динамометру:  $\vec{T}$  – сила, с которой на тело действует растянутая пружина динамометра, это и есть показания динамометра,  $m\vec{g}$  – сила тяжести.

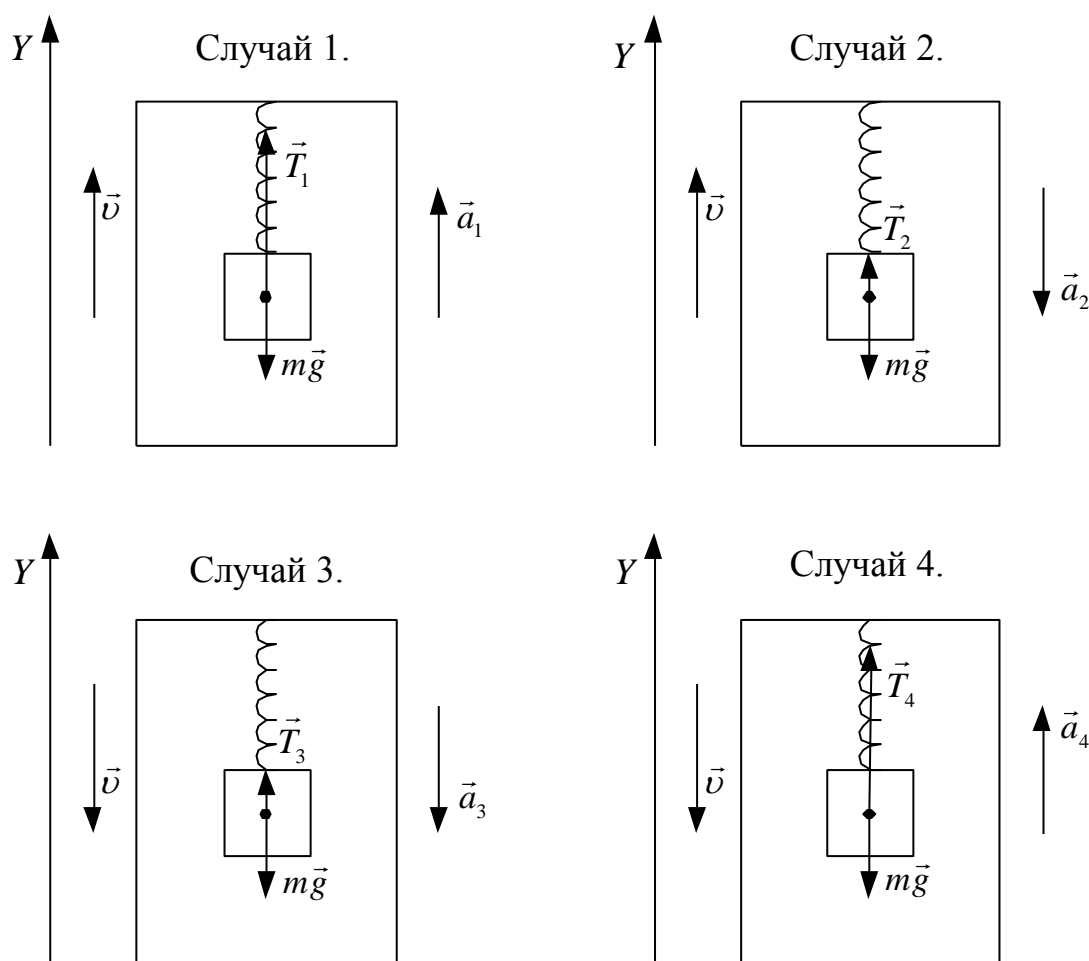


Рис.1.19

Запишем уравнение движения тела в лифте в инерциальной системе отсчета (за инерциальную систему отсчета примем Землю) – II закон Ньютона:

$$m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}. \quad (1)$$

Рассмотрим первый случай – лифт движется вверх с ускорением  $a_1$ . Предварительно договоримся, что ось  $Y$  в выбранной инерциальной системе

отсчета направлена вертикально вверх. Тогда уравнение (1) можно записать в проекциях на ось  $Y$ :

$$-mg + T_1 = ma_1,$$

откуда 
$$T_1 = m(g+a); \quad T_1 > mg. \quad (2)$$

В случае 2 лифт движется вверх, т.е. его вектор скорости  $\vec{v}$  направлен вверх (по оси  $Y$ ), а его ускорение  $a_2$  направлено в противоположную сторону, т.е. движение лифта замедленное:

$$-mg + T_2 = -ma_2 \text{ и } T_2 = m(g - a_2); \quad T_2 < mg. \quad (3)$$

Аналогично рассуждая, получим для случая 3:

$$-mg + T_3 = -ma_3; \quad T_3 = m(g - a_3); \quad T_3 < mg. \quad (4)$$

Полученное выражение (4) совпадает с выражением (3) для случая 2. Тело испытывает в обоих случаях частичную или полную невесомость. Сила  $T$ , с которой на тело действует растянутая пружина, становится меньше величины  $mg$ . По третьему закону Ньютона сила, с которой она растягивает пружину (подвес), равная по модулю  $\vec{T}$ , есть, по определению, вес тела  $\vec{P}$ :  $\vec{T} = -\vec{P}$ . Если лифт движется с ускорением  $a=g$ , т.е. под действием только одной силы тяжести  $m\vec{g}$  (см. выражение (1)), то  $\vec{T} = 0$ , и соответственно вес тела  $\vec{P}$  в этом случае равен нулю. В таких случаях говорят, что тело находится в состоянии невесомости.

В случае 4 имеем (рис. 4.19):

$$-mg + T_4 = ma_4; \quad T_4 = m(g+a_4); \quad T_4 > mg. \quad (5)$$

Сравнивая (5) и (2) видим, что в случаях 1 и 4 тело испытывает перегрузку.

Если лифт движется с постоянной скоростью ( $a = 0$ ), то из (1) следует:

$$T = mg,$$

т.е. динамометр показывает вес тела. Таким образом, величина силы  $T$  не зависит от направления скорости  $\vec{v}$ , а определяется только направлением и величиной ускорения.

Для получения численного ответа, подставив в (2) – (5) величины  $a_1, a_2, a_3$  и  $a_4$  из условия задачи, получим:

$$T_1 = 14,7 \text{ Н}; \quad T_2 = 4,9 \text{ Н}; \quad T_3 = 7,35 \text{ Н}; \quad T_4 = 12,25 \text{ Н}; \quad T_5 = 9,8 \text{ Н}.$$

**Задача 1.8.** Определите силу давления автомашины на дорогу: 1) на горизонтальном участке дороги; 2) на середине вогнутого участка дороги; 3) на середине выпуклого участка дороги. Масса машины  $m = 5000$  кг, скорость  $v = 20$  м/с, радиус кривизны криволинейных участков дороги  $R = 100$  м. Трением пренебречь.

#### Анализ и решение

Сделаем чертеж (рис.1.20). Систему отсчета свяжем с землей, направив ось  $Y$  вертикально вверх. Укажем силы, действующие на машину по вертикали: силу тяжести  $m\vec{g}$  и силу реакции опоры  $\vec{N}$ . Запишем уравнение движения - II закон Ньютона:

$$m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}_n, \quad (1)$$

где  $\vec{a}_n$  – нормальное ускорение, вектор нормального ускорения перпендикулярен скорости  $\vec{v}$  машины и направлен к центру кривизны траектории (дороги).

Рассмотрим каждый случай в отдельности.

1. При движении на горизонтальном участке дороги (рис. 1.20, а) нормальное ускорение  $\vec{a}_n$  равно нулю, поэтому из (1) получаем:

$$N_1 = mg. \quad (2)$$

По третьему закону Ньютона машина действует на дорогу с силой  $\vec{P}_1 = -\vec{N}_1$ ,  $\vec{P}_1$  – вес машины. По модулю

$$P_1 = N_1 \text{ и } P_1 = 5 \cdot 10^3 \cdot 9,8 = 4,9 \cdot 10^4 \text{ Н.} \quad (3)$$

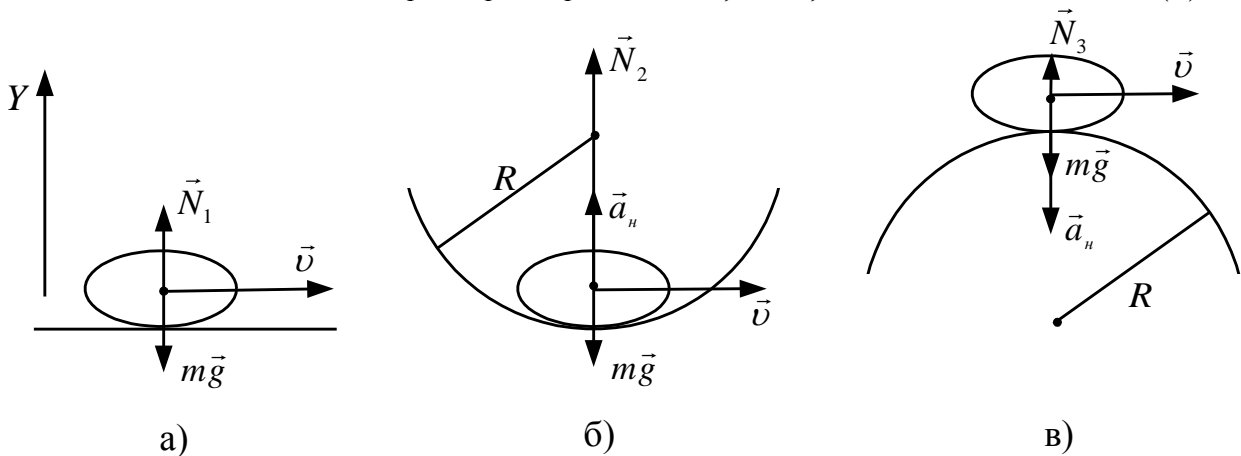


Рис.1.20

2. На вогнутом участке пути (рис. 1.20, б), имеем:

$$N_2 - mg = ma_n, \quad (4)$$

$$N_2 = m(g + a_n), \quad (5)$$

$$\text{т.е. } N_2 > mg, \text{ и } N_2 = 5 \cdot 10^3 \left( 9,8 + \frac{20^2}{100} \right) = 6,9 \cdot 10^4 \text{ Н.}$$

Сила давления машины на дорогу по модулю, равна по III закону Ньютона  $P_2 = N_2$ , вес машины в этом случае оказывается больше, чем на горизонтальном участке дороги. Пассажир, находящийся в машине в момент прохождения вогнутого участка, будет испытывать перегрузку, его вес возрастает на величину  $ma_n$ :

$$P_2 = N_2 = 6,9 \cdot 10^4 \text{ Н.}$$

3. Для выпуклого участка (рис. 1.20, в) имеем:

$$-mg + N_3 = -ma_n, \quad (6)$$

$$N_3 = m(g - a_n), \quad (7)$$

$$\text{т.е. } N_3 < mg \text{ и } N_3 = 5 \cdot 10^3 \left( 9,8 - \frac{20^2}{100} \right) = 2,9 \cdot 10^4 \text{ Н.}$$

Таким образом, сила давления машины на дорогу в этом случае меньше, чем на горизонтальном участке, на величину  $ma_n$ :

$$P_3 = N_3 = 2,9 \cdot 10^4 \text{ Н.}$$

Из выражения (7) можно заключить, что если скорость движения машины  $v$  по выпуклому участку достигнет величины

$$v = \sqrt{gR}, \quad (8)$$

то нормальное ускорение  $a_n = \frac{v^2}{R}$  будет равно  $g$  и автомобиль не окажет давления на дорогу. В этом случае пассажир в машине будет испытывать состояние невесомости.

**Задача 1.9.** Пуля, летящая горизонтально, попадает в тело, подвешенное на нерастяжимой нити длиной  $l = 2$  м, и застревает в нем. Масса пули в 1000 раз меньше массы тела. Найти скорость пули, если известно, что после удара пули тело сместилось по горизонтали на расстояние  $b = 10$  см.

#### Анализ и решение

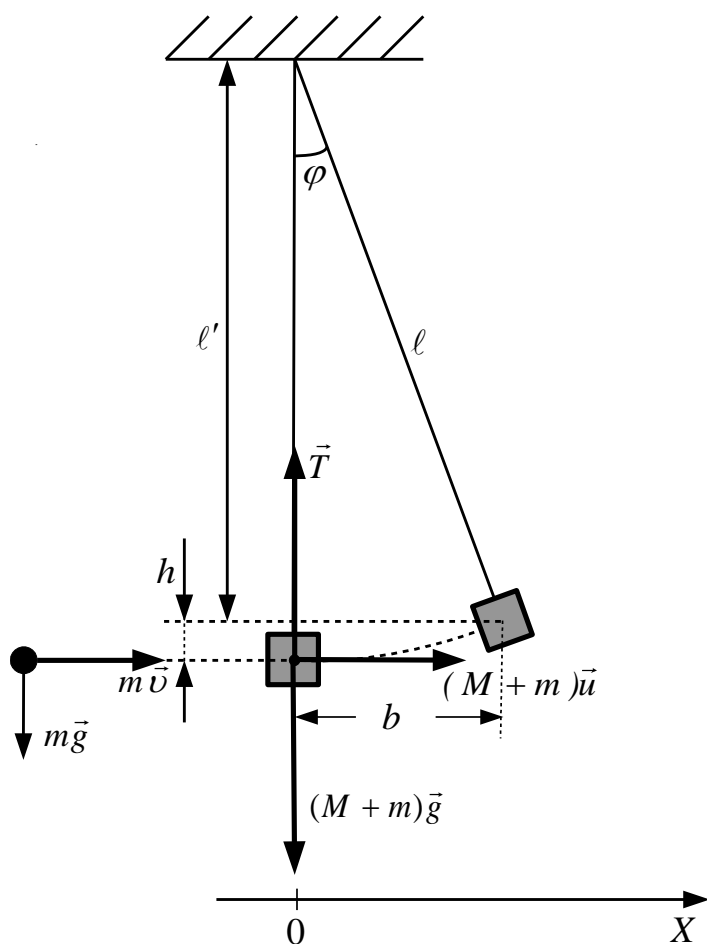


Рис.1.21

В задаче рассматривается **динамический** метод, позволяющий с помощью законов сохранения импульса и энергии рассчитать скорость пули. Сделаем чертеж (рис.1.21) к задаче. Рассмотрим момент соударения пули с массивным маятником. Рассматриваемая система тел не является замкнутой, так как на нее действуют внешние силы: силы тяжести пули и маятника и сила натяжения нити маятника, пренебречь которыми нельзя. Однако в момент соударения проекции этих сил на горизонтальную ось равны нулю, следовательно, сохраняется проекция механического импульса на горизонтальную ось  $OX$ , поэтому

$$mv = (M+m)u, \quad (1)$$

где  $m$  и  $M$  – массы пули и маятника соответственно;  $v$  – скорость пули;  $u$  – скорость системы после удара пули.

Тогда скорость пули равна:

$$v = (M + m)u / m = (1 + M / m) \cdot u \approx Mu / m. \quad (2)$$

После удара пули маятник, получив скорость  $u$ , отклонился на угол  $\varphi$ . Пренебрегая потерями энергии на сопротивление воздуха, можно записать закон сохранения механической энергии для системы «пуля + маятник» после удара:

$$(M + m)u^2 / 2 = (M + m)gh, \quad u = \sqrt{2gh}, \quad (3)$$

где  $h$  – максимальная высота, на которую поднялся центр масс системы.

Найдем  $h$ , если по условию задачи  $b \ll l$ :

$$h = l - l' = l - \sqrt{l^2 - b^2} = l(1 - \sqrt{1 - b^2/l^2}) \cong b^2 / 2l. \quad (4)$$

Из (2) – (4) получаем:

$$v = (bM / m)\sqrt{g/l}. \quad (5)$$

Используя численные данные из условия задачи, найдем величину скорости пули:

$$v = 220 \text{ м/с.}$$

### Примечание

По условию задачи удар пули о маятник абсолютно неупругий, поэтому значительная часть кинетической энергии летящей пули после соударения с маятником переходит во внутреннюю энергию системы (расходуется на разогрев пули, неупругую деформацию маятника и т.п.):

$$mv^2 / 2 = (M + m)u^2 / 2 + \Delta U.$$

Предлагаем читателю самостоятельно оценить величину  $\Delta U$  и сравнить ее с кинетической энергией пули до соударения.

**Задача 1.10.** Тело скользит сначала по наклонной плоскости, составляющей угол  $\alpha = 10^\circ$  с горизонтом, а затем по горизонтальной поверхности. Найти, чему равен коэффициент трения, если известно, что тело до остановки проходит по горизонтали такое же расстояние, как и по наклонной плоскости. Коэффициент трения считать постоянным.

### Анализ и решение

Сделаем чертеж к задаче (рис.1.22). За уровень отсчета потенциальной энергии примем положение тела на горизонтальной поверхности.

Тело, покоясь на вершине наклонной плоскости, обладает потенциальной энергией  $mgh$ , где  $m$  – масса тела,  $h$  – высота наклонной плоскости. При скольжении тела вдоль наклонной плоскости, а затем по горизонтальной поверхности, через

некоторое время тело останавливается из-за наличия трения. При этом первоначальный запас энергии тела будет израсходован на работу против силы трения  $mgh = A_{mp}$ . Тогда, учитывая, что  $h = S \cdot \sin \alpha$ , получим:

$$A_{mp} = mgS \cdot \sin \alpha. \quad (1)$$

Работа  $A_{mp}$  определяется величиной силы трения и пройденным путем. Поэтому, можно записать, что

$$A_{mp} = A_{mp1} + A_{mp2}, \quad (2)$$

где  $A_{mp1} = F_{mp1} S$  на наклонной плоскости,  
 $A_{mp2} = F_{mp2} S$  на горизонтальной поверхности.

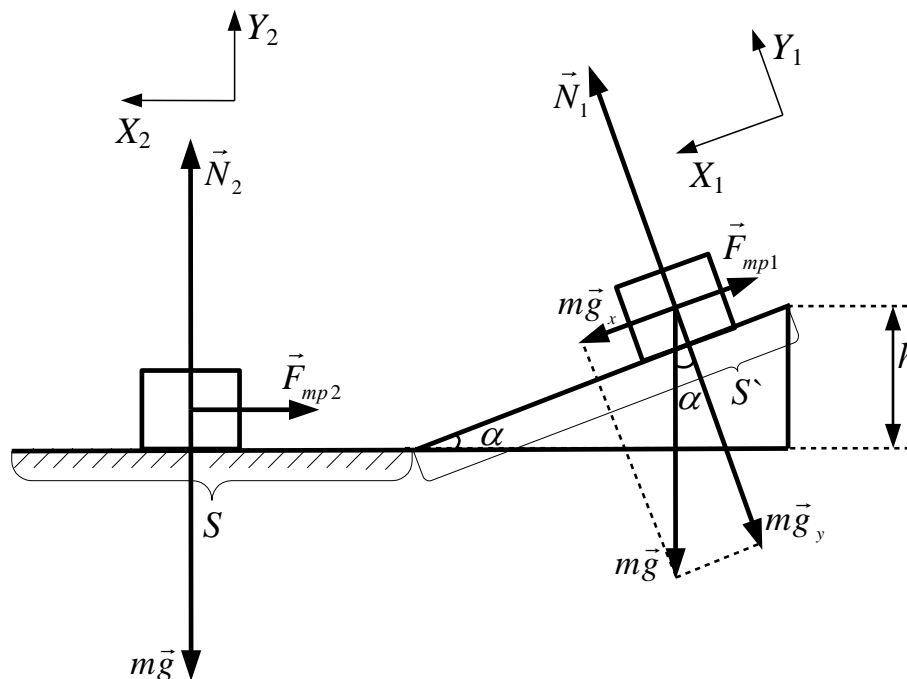


Рис.1.22

Сила трения скольжения определяется выражением  $F_{mp} = \mu N$ , где  $N$  – сила нормального давления, а  $\mu$  – коэффициент трения скольжения. Нормальное давление на наклонном и горизонтальном участках различно  $N_1 = mg \cos \alpha$ ,  $N_2 = mg$ , поэтому  $F_{mp1} \neq F_{mp2}$  и

$$F_{mp1} = \mu N_1 = \mu mg \cos \alpha, \quad (3)$$

$$F_{mp2} = \mu N_2 = \mu mg. \quad (4)$$

Тогда, учитывая (1) – (4) окончательно запишем:

$$mg S \sin \alpha = \mu mg S \cos \alpha + \mu S mg = \mu mg S (\cos \alpha + 1). \quad (5)$$

Величину  $\mu$  находим из выражения (5):

$$\mu = \sin \alpha / (\cos \alpha + 1).$$

Подставляя значение  $\alpha = 10^\circ$  из условия задачи, получим:

$$\mu = \sin 10^\circ / (\cos 10^\circ + 1) = 0,174 / (0,98 + 1) = 0,088.$$



## ТЕМА 2

### МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Твердым телом называется такое тело, изменением формы и размеров (объема) которого можно пренебречь в процессе движения.

Рассматривая кинематические характеристики вращательного движения вокруг неподвижной оси (тема I, §2), мы выяснили, что для описания подобного движения удобнее пользоваться понятиями углового ускорения  $\varepsilon$  и угловой скорости  $\omega$ , так как они одинаковы для всех точек вращающегося тела, в отличие от линейной скорости  $v$  и линейного ускорения  $a$ , изменяющихся от точки к точке в зависимости от ее расстояния  $r$  до оси вращения.

Очевидно, что для твердого тела должны быть введены дополнительные величины, определяющие динамические характеристики его вращательного движения.

Рассмотрим для начала небольшое тело (материальную точку) массы  $m$ , укрепленное на жестком невесомом стержне, на расстоянии  $r$  от оси вращения  $O$  (рис. 2.1). Пусть приложенная сила  $\vec{F}$ , постоянно перпендикулярная  $\vec{r}$  вызовет перемещение тела на величину  $d\vec{r}$  при движении тела по дуге окружности  $dS$ .

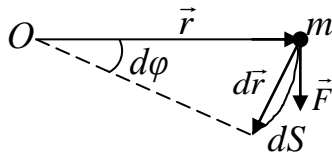


Рис. 2.1

Вычислим элементарную работу  $dA$  этой силы, учитывая, что сила  $\vec{F}$  направлена по касательной к дуге  $dS$ :

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F dS = F r d\phi. \quad (2.1)$$

Поскольку работа есть мера изменения кинетической энергии, то

$$dA = d(mv^2 / 2), \quad (2.2)$$

здесь  $v$  – конечная скорость, начальная скорость равна нулю.

Учитывая, что  $v = \omega r$ , отношения (2.1) и (2.2) можно переписать так:

$$dA = F r d\phi = d(mr^2 \omega^2 / 2). \quad (2.3)$$

Введем новые величины, характеризующие вращения.

#### Момент силы

Момент силы – вектор, направленный вдоль оси вращения:

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]. \quad (2.4)$$

Направление вектора  $\vec{M}$  определяется правилом правого винта (рис.2.2). Если сила  $\vec{F}$  приложена под произвольным углом к радиус-вектору  $\vec{r}$ , проведенному от оси

вращения к точке  $A$  (рис. 2.3), то надо рассмотреть две ее компоненты: одна – вдоль  $\vec{r}$  ( $\vec{F} \parallel \vec{r}$ ), а вторая – перпендикулярная  $\vec{r}$  ( $\vec{F} \perp \vec{r}$ ),

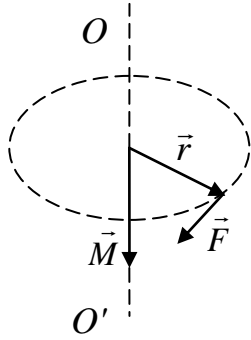


Рис.2.2

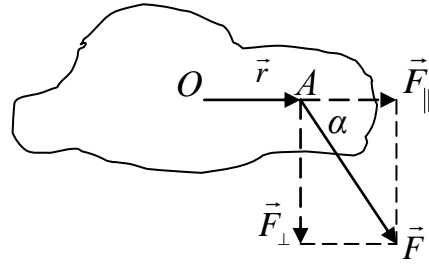


Рис. 2.3

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}_{\parallel}] + [\vec{r}, \vec{F}_{\perp}],$$

где  $\vec{F}_{\parallel}$  – будет вызывать изгиб оси вращения и компенсироваться ею, а  $\vec{F}_{\perp}$  – создаст вращательный момент, модуль которого в скалярном виде равен:

$$M = F_{\perp} r = F r \sin \alpha, \quad (2.5)$$

что в векторной записи имеет вид (2.4). Отметим, что на рис.2.3 ось вращения проходит через т.  $A$  перпендикулярно плоскости рисунка.

### Момент инерции. Уравнение динамики вращения твердого тела

Моментом инерции  $I$  материальной точки  $m$ , укрепленной на расстоянии  $r$  относительно оси (рис.2.1) называют физическую величину, равную

$$I = mr^2 \quad (2.6)$$

и характеризующую инертные свойства тела по отношению к вращению.

Таким образом, уравнение (2.3) может быть представлено в ином виде:

$$dA = M d\varphi = d(I\omega^2/2) = dK, \quad (2.7)$$

где  $K = I\omega^2/2$  – кинетическая энергия вращательного движения материальной точки.

Если применить II закон Ньютона к вращению материальной точки массой  $m$  (рис.2.1), то можно записать (в скалярной форме):

$$F = m \frac{dv}{dt} = mr \frac{d\omega}{dt}. \quad (2.8)$$

Тогда умножив левую и правую части (2.8) на  $r$ , получим иную запись II закона Ньютона в скалярной форме:

$$M = Fr = mr^2 \frac{d\omega}{dt} = I\varepsilon, \quad (2.9)$$

а в векторной форме:

$$\vec{M} = I\vec{\varepsilon}. \quad (2.10)$$

Вектор момента силы  $\vec{M}$ , как и углового ускорения  $\vec{\varepsilon}$ , направлен вдоль оси вращения. Соотношение (2.10) является II законом Ньютона для вращательного движения.

Момент инерции системы материальных точек относительно оси вращения равен сумме произведений масс материальных точек системы на квадраты их расстояний до рассматриваемой оси:

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2. \quad (2.11)$$

В случае непрерывного распределения масс эта сумма переходит в интеграл:

$$I = \int r^2 dm, \quad (2.12)$$

где интегрирование ведется по всему объему тела. Величина  $r$  в этом случае определяет расстояние элементарной массы  $dm$  до оси вращения.

Рассчитаем момент инерции для нескольких твердых тел различной геометрической формы:

1. Момент инерции тонкого однородного стержня (длиной  $l$  и массой  $m$ ) относительно оси, проходящей через один из концов стержня, перпендикулярно ему (см. рис. 2.4).

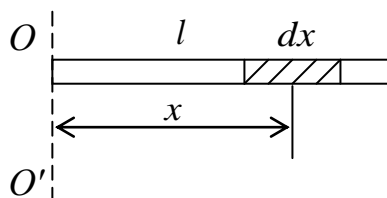


Рис. 2.4

Выберем элемент  $dx$  на расстоянии  $x$  от оси вращения. Масса  $dm$  элемента  $dx$  равна

$$dm = (m/l) \cdot dx,$$

а его момент инерции (ввиду малости  $dx$  элемент можно считать материальной точкой):

$$dI = (m/l) \cdot x^2 dx.$$

Чтобы найти  $I$  стержня, надо просуммировать все  $dI$ , т.е. взять интеграл:

$$I = \int_0^{\ell} dI = \int_0^{\ell} (m/l) \cdot x^2 dx = (m/3l) \cdot x^3 \Big|_0^{\ell} = m\ell^2 / 3. \quad (2.13)$$

2. Момент инерции кольца или тонкостенного цилиндра массой  $m$  и радиусом  $R$  (рис. 2.5), относительно их оси симметрии.

Масса элемента кольца длиной  $dl$  равна:

$$dm = (m / 2\pi R) \cdot dl .$$

Момент инерции элемента:

$$dI = dm R^2 = (m / 2\pi) \cdot R dl .$$

Момент инерции кольца:

$$I_0 = \int_0^{2\pi R} dI = \int_0^{2\pi R} (m / 2\pi) \cdot R dl = (m / 2\pi) \cdot R l \Big|_0^{2\pi R} = mR^2 . \quad (2.14)$$

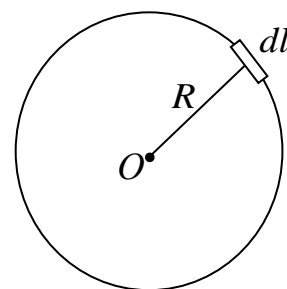


Рис. 2.5

Момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс, обозначается  $I_0$ .

Именно так можно записать момент инерции велосипедного колеса в лабораторной работе №3, так как обод велосипедного колеса специально утяжелен так, что массой спиц можно пренебречь.

3. Момент инерции сплошного цилиндра радиуса  $R$ , высотой  $h$  и массой  $m$  (рис. 2.6) относительно оси цилиндра.

Разобьем цилиндр на тонкие цилиндрические слои толщиной  $dr$ . Масса каждого слоя:

$$dm = \frac{mh}{\pi R^2 h} \pi((r + dr)^2 - \pi r^2) = \frac{m}{\pi R^2} (\pi r^2 + 2\pi r dr + dr^2 - \pi r^2) = \frac{m}{\pi R^2} 2\pi r dr = \frac{2m}{R^2} r dr$$

( $dr^2 \ll 2\pi r dr$ , этим слагаемым мы пренебрегли). Момент инерции каждого слоя:

$$dI = dm \cdot r^2 = (2m/R^2) r^3 dr . \quad \text{Тогда}$$

момент инерции цилиндра:

$$I_0 = \int_0^R (2m/R^2) r^3 dr = (2m/4R^2) r^4 \Big|_0^R .$$

Откуда

$$I_0 = mR^2 / 2 . \quad (2.15)$$

Примеры 2 и 3 относятся к случаям, когда ось вращения проходит через центр масс тел.

Однако, если известен момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс, то момент инерции его относительно другой параллельной оси можно найти, используя **теорему Штейнера**. Она гласит: момент инерции  $I$  относительно любой оси вращения равен моменту его инерции  $I_0$  относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, сложенному с произведением массы тела на квадрат расстояния между осями  $a$ :

$$I = I_0 + ma^2 . \quad (2.16)$$

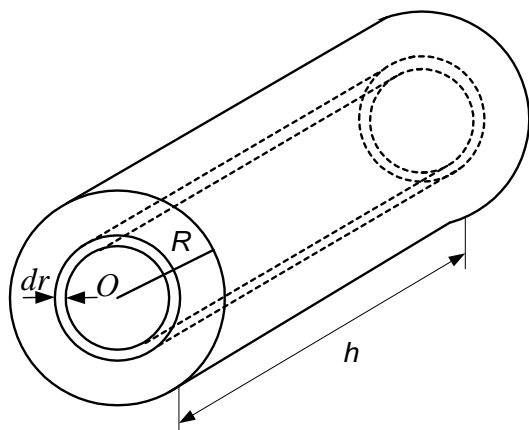


Рис. 2.6

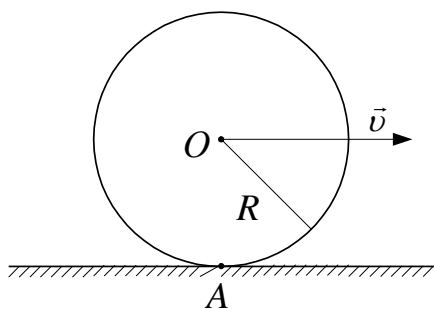


Рис.2.7

В качестве примера рассмотрим качение без проскальзывания по горизонтальной поверхности со скоростью  $v$  сплошного тонкого диска массы  $m$  и радиуса  $R$  (рис. 2.7). Ось, проходящая через точку  $A$  перпендикулярно плоскости рисунка, называется мгновенной осью вращения. Момент инерции диска относительно этой точки равен по теореме Штейнера:

$$I_A = I_0 + mR^2 = mR^2 / 2 + mR^2 = 3mR^2 / 2. \quad (2.17)$$

Рассчитаем кинетическую энергию диска:

$$K = I_A \omega^2 / 2 = 3mR^2 \omega^2 / 4. \quad (2.18)$$

Можно  $K$  вычислить иначе, считая, что кинетическая энергия диска равна сумме кинетических энергий двух движений диска: вращения диска вокруг оси, проходящей через центр масс, и поступательного движения центра масс со скоростью  $v$  ( $v = \omega R$ ):

$$K = I_0 \omega^2 / 2 + mv^2 / 2 = mR^2 \omega^2 / 4 + mR^2 \omega^2 / 2 = 3mR^2 \omega^2 / 4. \quad (2.19)$$

### Момент импульса. Сохранение момента импульса

Исходя из второго закона Ньютона для вращательного движения (см. (2.9)), можно получить очень важную физическую величину. Если  $I = const$ , то это выражение может быть записано в несколько ином виде:

$$M = I\varepsilon = I \frac{d\omega}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt}. \quad (2.20)$$

Величина  $I\omega$  получила названия момента импульса  $L$ . Для вращения массы  $m$ , представленной на рис.2.8,

$$L = I\omega = mr^2(v/r) = mvr. \quad (2.21)$$

Момент импульса – вектор, совпадающий по направлению с вектором угловой скорости  $\vec{\omega}$ :

$$\vec{L} = I\vec{\omega}. \quad (2.22)$$

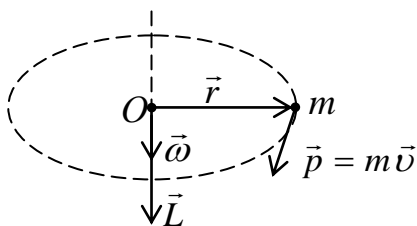


Рис. 2.8

Из соотношения (2.20) следует, что если момент сил, действующих на тело, равен нулю (система замкнута), то момент импульса постоянен (сохраняется):

$$\vec{L} = I\vec{\omega} = const. \quad (2.23)$$

Это – закон сохранения момента импульса.

## Законы сохранения

Рассматривая различные виды взаимодействия, мы ввели понятие **замкнутой системы** как системы тел (материальных точек), на которые не действуют внешние силы.

Для замкнутых систем неизменны, т.е. сохраняются: энергия, импульс и момент импульса. В соответствии с этим существуют три закона сохранения:

- закон сохранения энергии,
- закон сохранения импульса,
- закон сохранения момента импульса.

Эти три закона являются универсальными законами, всегда выполняющимися как в макро-, так в микромире, а также при любой скорости движения.

### Сопоставление основных величин и уравнений, описывающих поступательное и вращательное движение

Поступательное движение	Вращательное движение
Кинематические величины	
$\Delta \vec{r}, \vec{v}, \vec{a}$ – перемещение, скорость, ускорение.	$\Delta \vec{\varphi}, \vec{\omega}, \vec{\varepsilon}$ – угол поворота, угловая скорость, угловое ускорение.
Равномерное прямолинейное движение: $\Delta \vec{r} = \vec{v} \Delta t, \vec{v} = const, \vec{a} = 0.$	Равномерное вращение по окружности: $\Delta \vec{\varphi} = \vec{\omega} \Delta t, \vec{\omega} = const, a_H = \omega^2 R.$
Равноускоренное прямолинейное движение: $a_H = 0,$ $\vec{a} = const,$ $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t,$ $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \vec{a}t^2 / 2.$	Равноускоренное вращение вокруг неподвижной оси: $\vec{\varepsilon} = const \quad (\varepsilon = a_K / R), \quad a_K = const,$ $\vec{a} = \vec{a}_K + \vec{a}_H,$ $\omega = \omega_0 + \varepsilon t,$ $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon \cdot t^2 / 2.$
Динамические величины	
Сила - $\vec{F}$ .	Момент силы - $\vec{M} = [\vec{r} \vec{F}]$ .
Инертные свойства характеризуются:	
массой $m$ .	моментом инерции относительно выбранной оси вращения $I$ .
Основное уравнение динамики	
$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt}.$	$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$

Поступательное движение	Вращательное движение
Движение системы как целого характеризуется:	
скоростью центра масс - $\vec{v}_c$ , импульсом - $\vec{p}_c = m \vec{v}_c$ .	угловой скоростью вращения - $\vec{\omega}$ , моментом импульса $\vec{L} = I \vec{\omega}$ .
Закон сохранения	
импульса - при $\sum_i \vec{F}_{\text{вн}i} = 0$ $\vec{p}_c = \text{const}$ , т.е. в замкнутой системе $\vec{v}_c = \text{const}$ .	момента импульса - при $\sum_i \vec{M}_{\text{вн}i} = 0$ $\vec{L} = \text{const}$ , т.е. в замкнутой системе $\vec{\omega} = \text{const}$ .
Кинетическая энергия	
$K = mv_c^2 / 2.$	$K = I \omega^2 / 2.$
Работа и мощность	
$dA = \vec{F} d\vec{r},$ $N = \frac{dA}{dt} = \vec{F} \vec{v}.$	$dA = \vec{M} d\vec{\varphi},$ $N = \frac{dA}{dt} = \vec{M} \vec{\omega}.$

### Примеры решения задач

**Задача 2.1.** Стержень длиной 0,4 м может вращаться вокруг оси, проходящей через его середину. На концах стержня имеются два точечных тела массой 0,1 кг. Найти момент инерции этой системы, если масса стержня много меньше массы тел.

#### Анализ и решение

По определению (2.6) момент инерции точечной массы, расположенной на расстоянии  $r$  от оси вращения, равен  $I = mr^2$ .

В задаче имеются два точечных тела массой  $m$  каждое на расстоянии  $l/2$  от оси вращения (рис.2.9), поэтому окончательно получим:

$$I_{\text{сист}} = 2ml^2 / 4 = ml^2 / 2.$$

Численное значение момента инерции этой системы равно:

$$I_{\text{сист.}} = 0,1 \cdot 0,4^2 / 2 = 0,008 \text{ кг м}^2.$$

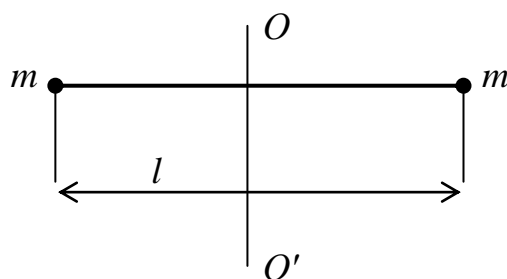


Рис. 2.9

Мы пренебрегли массой и моментом инерции стержня, на котором укреплены тела, так как по условию задачи:

$$m_{cm} \ll m_m .$$

Если  $m_{cm}$  сравнима с массой грузов, то момент инерции системы будет равен:

$$I'_{сист.} = I_{cm} + ml^2 / 2 .$$

**Задача 2.2.** На массивный барабан радиуса 0,2 м намотан невесомый и нерастяжимый шнур, к которому привязан груз массой 1 кг. До начала вращения барабана высота груза над полом 1 м. После освобождения груза он достигает пола через 2 с. Найти момент инерции барабана и его кинетическую энергию в момент удара груза о пол.

### Анализ и решение

Сделаем чертеж к задаче (рис. 2.10) и изобразим на нем силы, действующие на груз и барабан. После освобождения груз движется поступательно, а барабан приходит во вращение по часовой стрелке. Для того чтобы ответить на вопрос задачи, необходимо записать уравнение движения – II закон Ньютона – для каждого тела в отдельности, т.е. для груза

$$m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a} \quad (1)$$

и барабана

$$I\vec{\varepsilon} = \vec{M} , \quad (2)$$

где  $\vec{a}$  – ускорение поступательного движения груза;  $I$  – момент инерции барабана;  $\vec{\varepsilon}$  – его угловое ускорение;  $\vec{M}$  – момент внешних сил, действующих на барабан.

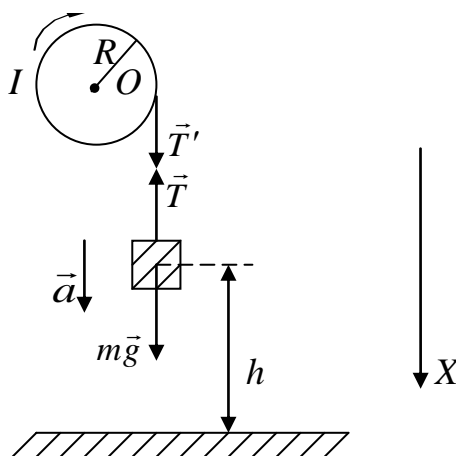


Рис.2.10



На рис. 2.10 видно, что единственной внешней силой, действующей на барабан, является сила натяжения шнура  $\vec{T}'$ . Момент силы  $\vec{T}'$  равен (по модулю):

$$M = T'R = I\varepsilon, \quad (3)$$

где  $R$  – плечо силы  $\vec{T}'$ , равное радиусу барабана. Сила  $\vec{T}'$  по модулю равна силе  $\vec{T}$ , так как шнур невесомый и нерастяжимый.

Силу  $\vec{T}$  определим из (1), учитывая, что  $\vec{a}$  груза можно рассчитать из кинематических соотношений:

$$h = at^2/2, \quad \text{отсюда } a = 2h/t^2.$$

Тогда из (1) получим:

$$T = m(g - a) = m(g - 2h/t^2). \quad (4)$$

Учитывая, что нить движется по барабану без проскальзывания, можно связать величины  $a$  и  $\varepsilon$ :

$$a = \varepsilon R. \quad (5)$$

Подставляя (4) и (5) в (3), получим окончательно выражение для расчета момента инерции барабана:

$$I = \frac{m(g - 2h/t^2)R}{2h/(t^2 R)} = mR^2((gt^2/2h) - 1). \quad (6)$$

Величину  $I$  найдем, подставив данные условия задачи:

$$I = 0,704 \text{ кг м}^2.$$

**Задача 2.3.** Горизонтальная платформа, имеющая момент инерции  $I_n = 40 \text{ кг м}^2$  вращается с угловой скоростью, соответствующей частоте 20 об/мин. В центре платформы стоит человек и держит в расставленных руках гири. Какое число оборотов в минуту будет делать платформа, если человек, согнув руки, уменьшит свой момент инерции от 2,94 до 0,98 кг м<sup>2</sup>. Какую работу при этом совершит человек?

#### Анализ и решение

Так момент внешних сил, действующих на платформу, вращающуюся относительно вертикальной оси, проходящей через ее геометрический центр, равен нулю, то момент импульса системы «платформа и человек с гирями» остается постоянным. Запишем закон сохранения момента механического импульса для системы (рис. 2.11):

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2, \quad (1)$$

где  $I_1$  и  $\omega_1$  – момент инерции и угловая скорость системы в первом случае (человек держит гири в расставленных руках);

$I_2$  и  $\omega_2$  – соответствующие величины, характеризующие систему в случае, когда человек, согнув руки, приблизил гири к себе.

Раскроем значение величин  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $\omega_1$  и  $\omega_2$ :

$$I_1 = I_n + I_{r_1}, I_2 = I_n + I_{r_2}, \omega_1 = 2\pi n_1, \omega_2 = 2\pi n_2. \quad (2)$$

Подставив (2) в (1), получаем выражение для  $n_2$ :

$$n_2 = n_1 (I_n + I_{r_1}) / (I_n + I_{r_2}). \quad (3)$$

Значение  $n_2$  находим, подставляя величины из условия задачи:

$$n_2 = 20 (40 + 2,94) / (40 + 0,98) = 21 \text{ об/мин.}$$

Величину работы  $A$ , которую при этом совершает человек, находим, записав изменение кинетической энергии вращения для второго и первого положения гири:

$$A = K_2 - K_1 = I_2 \omega_2^2 / 2 - I_1 \omega_1^2 / 2. \quad (4)$$

Подставляя в (4)  $n_2$  из (3) и данные условия задачи, получим:

$$A = 4,9 \text{ Дж.}$$

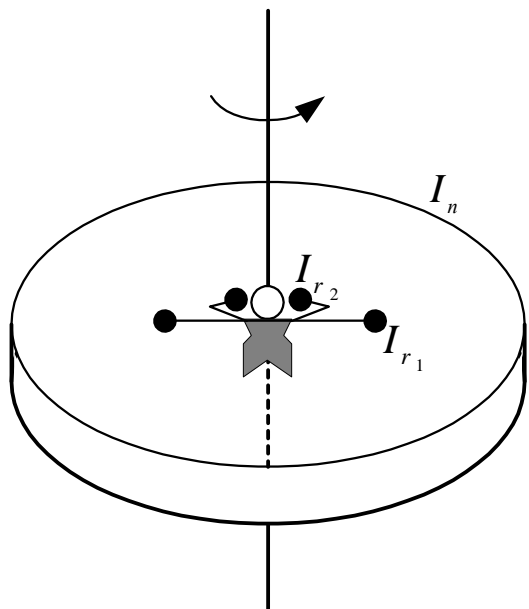


Рис. 2.11

**Задача 2.4.** Найти линейное ускорение оси цилиндра радиуса  $r$ , скатывающегося без скольжения по наклонной плоскости с углом наклона  $\alpha$ . Начальная скорость цилиндра равна нулю. Сравнить найденное значение с ускорением тела, соскальзывающего с этой наклонной плоскости при отсутствии трения.

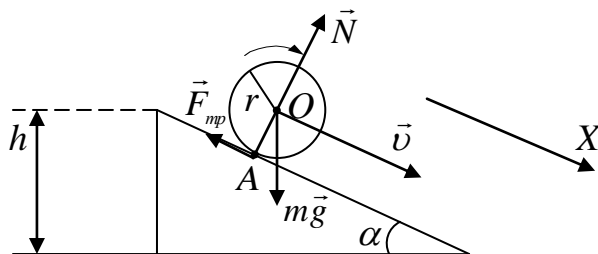


Рис.2.12

### Анализ и решение

Сделаем чертеж (рис.2.12). Так как по условию задачи цилиндр скатывается с наклонной плоскости без скольжения, то скорость точки касания  $A$  равна нулю;

через эту точку проходит мгновенная ось вращения. Отсутствие скольжения обеспечивается действием следующих сил: силы реакции опоры  $\vec{N}$  и силы трения  $\vec{F}_{mp}$  со стороны наклонной плоскости. Сила трения  $\vec{F}_{mp}$  есть сила трения покоя (точка  $A$  покоится в каждый момент времени) или сила трения сцепления. Она принимает любое значение от 0 до  $\mu N$  (где  $\mu$  – коэффициент трения), но такое, чтобы обеспечить качение тела. Если для качения требуется сила большая, чем  $\mu N$ , то чистое качение невозможно – оно будет проходить со скольжением.

Решим задачу двумя способами.

**1 способ.** Он основан на применении II закона Ньютона для вращательного движения.

Будем рассматривать вращение цилиндра относительно мгновенной оси вращения, проходящей через точку  $A$ . Запишем II закона Ньютона:

$$I_A \varepsilon_A = M, \quad (1)$$

где  $I_A$  – момент инерции цилиндра относительно рассматриваемой оси;

$\varepsilon_A$  – его угловое ускорение;

$M$  – суммарный момент внешних сил относительно выбранной оси вращения.

Внешними силами в нашем случае являются сила реакции опоры  $\vec{N}$ , сила тяжести  $m\vec{g}$  и сила трения сцепления  $\vec{F}_{mp}$ . Силы  $\vec{F}_{mp}$  и  $\vec{N}$  не создают момента, так как они приложены к мгновенной оси вращения. Момент силы  $mg$  равен  $r mg \sin\alpha$ .

Запишем (1), раскрыв  $M$ :

$$I_A \varepsilon_A = r mg \sin\alpha. \quad (2)$$

Относительно точки  $A$  линейные скорость  $v$  и ускорение  $a$  точки  $O$  равны:

$$v = \omega r, \quad a = \varepsilon_A r. \quad (3)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} I_A a / r &= r mg \sin\alpha, \\ a &= mg r^2 \sin\alpha / I_A \end{aligned} \quad (4)$$

По теореме Штейнера:

$$I_A = I_O + mr^2, \quad (5)$$

где  $I_O$  – момент инерции цилиндра относительно оси вращения, проходящей через точку  $O$ :

$$I_O = mr^2 / 2.$$

Получим выражение для линейного ускорения:

$$a = mg r^2 \sin\alpha / (I_O + mr^2) = g \sin\alpha / (1 + I_O / mr^2). \quad (6)$$

Аналогично рассуждения можно провести, рассматривая вращение цилиндра относительно оси, проходящей через его центр масс  $O$ , тогда вращательный момент создается силой трения. Запишем II закон Ньютона для этого случая:

$$I_O \varepsilon = r F_{mp} . \quad (7)$$

Это уравнение содержит два неизвестных:  $\varepsilon$  и  $F_{mp}$ . Поэтому необходимо дополнить еще одним уравнением – уравнением поступательного движения центра масс (II закон Ньютона):

$$mg \sin \alpha - F_{mp} = ma. \quad (8)$$

Учитывая, что  $a = \varepsilon r$ , имеем систему из трех уравнений. Решая ее, получим прежний результат (см. (6)).

Кроме того, из (7) можно найти выражение для силы трения сцепления:

$$F_{mp} = I_O mg \sin \alpha / (I_O + mr^2).$$

**2 способ.** Этот способ основан на применении закона сохранения энергии. Кинетическая энергия тела при вращении относительно мгновенной оси, проходящей через точку  $A$ , равна:

$$K = I_A \omega^2 / 2. \quad (9)$$

Изменение потенциальной энергии тела, скатывающегося с наклонной плоскости, равно  $mgh$ , где  $h = x \sin \alpha$  – высота наклонной плоскости, а  $x$  – путь тела вдоль наклонной плоскости.

Тогда из закона сохранения энергии следует, что

$$\begin{aligned} I_A \omega^2 / 2 &= mg x \sin \alpha \quad \text{или} \\ I_A v^2 / 2r^2 &= mg x \sin \alpha. \end{aligned} \quad (10)$$

Так как при равноускоренном движении  $a = v^2 / 2x$ , то для ускорения  $a$  получим соотношение:

$$a = mgr^2 \sin \alpha / I_A = g \sin \alpha / (1 + I_O / mr^2).$$

Следует отметить, что при отсутствии скольжения сила трения приложена к тем точкам, которые лежат на мгновенной оси вращения. Скорость этих точек равна нулю, поэтому сила трения сцепления работы не совершает. Вот почему в рассматриваемом случае можно применить закон сохранения механической энергии.

Рассмотрим теперь скольжение тела по наклонной плоскости при отсутствии трения. Запишем уравнение движения тела:

$$\begin{aligned} mg \sin \alpha &= ma, \\ a &= g \sin \alpha. \end{aligned} \quad (11)$$

Сравним (6) и (11). В выражении (6) знаменатель всегда больше единицы, т.е. ускорение при качении меньше, чем в случае скольжения.

Учитывая, что момент инерции цилиндра  $I_O = mr^2 / 2$ , получаем окончательное выражение для линейного ускорения центра масс цилиндра при его скатывании по наклонной плоскости:

$$a = (2g \sin \alpha) / 3.$$

## ТЕМА 3

### КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

#### Кинематика гармонических колебаний

Колебаниями называются движения или процессы, которые повторяются через одинаковый промежуток времени около положения равновесия.

Простейший вид механического колебательного движения – гармонические колебания. При гармонических колебаниях смещение  $x$  материальной точки от положения равновесия, её скорость  $v$  и ускорение  $a$  изменяются по закону синуса или косинуса. Поэтому, для смещения  $x$  можно записать:

$$x = x_m \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (3.1)$$

где  $x$  – смещение от положения равновесия в момент времени  $t$ ;

$x_m$  – амплитуда колебаний (максимальное смещение);

$\varphi = (\omega t + \varphi_0)$  – фаза колебаний в момент времени  $t$ ;

$\omega$  – циклическая частота колебаний;

$\varphi_0$  – начальная фаза колебаний (при  $t = 0$ ).

Состояние системы повторяется через промежуток времени  $T$ , называемый периодом колебаний. За период колебаний фаза колебаний получает приращение  $2\pi$  :

$$\varphi = \omega(t + T) = \omega t + 2\pi,$$

отсюда

$$\omega = 2\pi/T.$$

Частота колебаний – это величина, обратная периоду колебаний

$$\nu = 1/T$$

и равная числу колебаний, совершаемых в единицу времени.

Величины  $\omega$  и  $\nu$  связаны очевидным соотношением:

$$\omega = 2\pi \nu.$$

Единица частоты герц (Гц) – это частота такого периодического процесса, когда за 1с совершается одно колебание.

Скорость материальной точки при гармонических колебаниях равна:

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega x_m \sin(\omega t + \varphi_0) = \omega x_m \cos(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}), \quad (3.2)$$

где  $v_m = \omega x_m$  – амплитуда скорости.

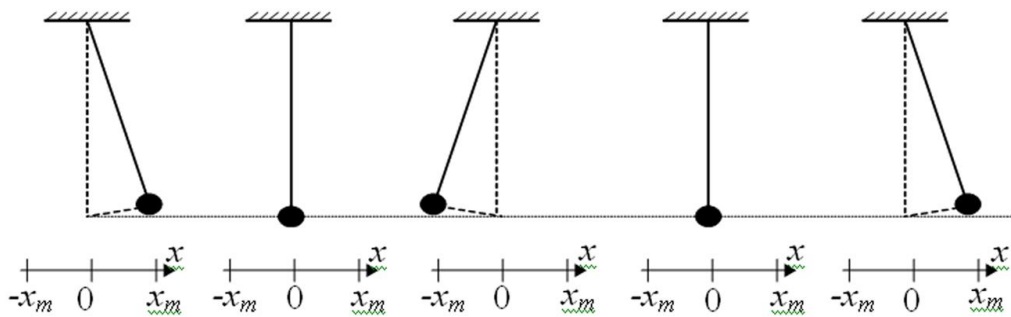
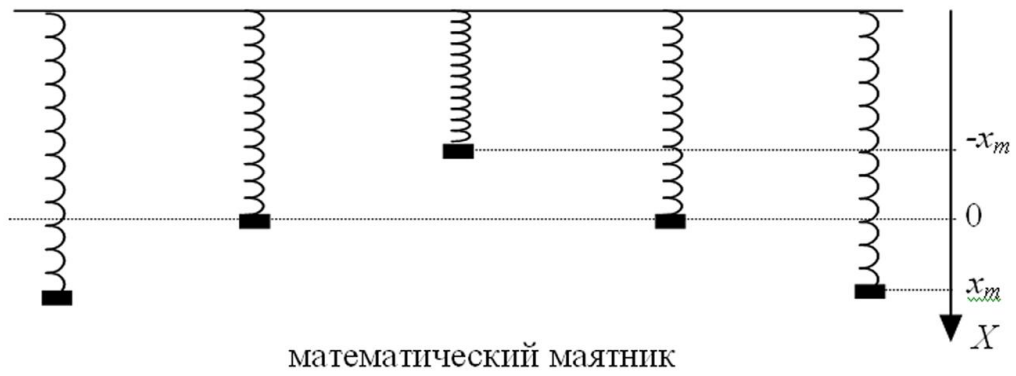
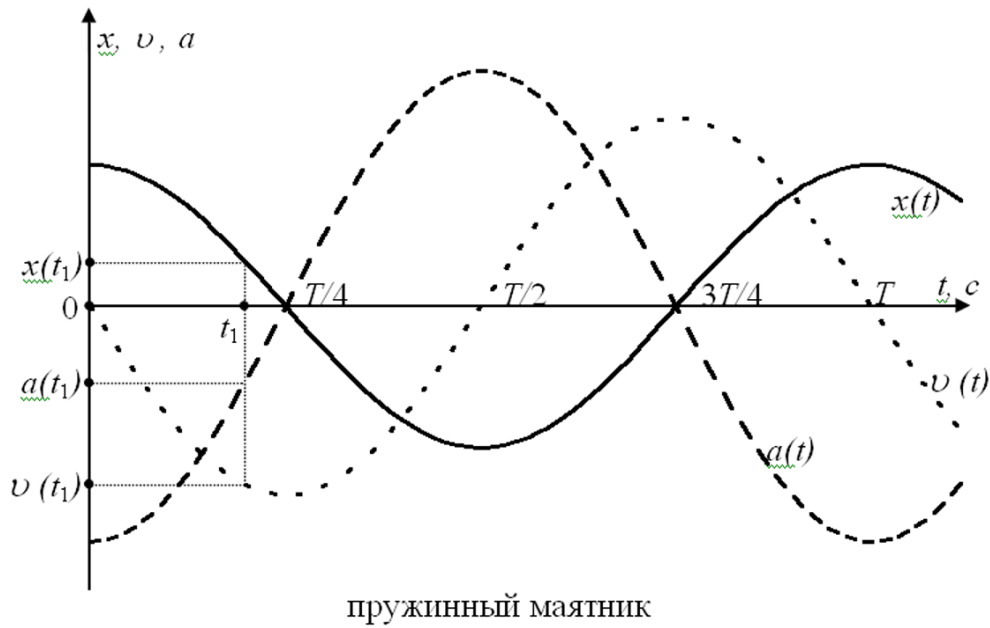


Рис. 3.1

Скорость, как и смещение, являются гармонической функцией времени. Скорость опережает по фазе смещение на  $\pi/2$ . В те моменты времени, когда смещение достигает максимума ( $x = x_m$ ), скорость точки  $v = 0$ , и наоборот.

**Ускорение** при гармоническом колебательном движении равно:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x(t) = \omega^2 x_m \cos(\omega t + \varphi_0 + \pi), \quad (3.3)$$

где  $a_m = \omega^2 x_m$  – амплитуда ускорения.

Ускорение также является гармонической функцией времени и опережает по фазе смещение на  $\pi$ . Последнее означает, что при гармонических колебаниях ускорение прямо пропорционально смещению и направлено в сторону, противоположную смещению.

На рис. 3.1 даны графики смещения  $x(t)$ , скорости  $v(t)$  и ускорения  $a(t)$  для гармонического колебательного движения. Ниже на нем приведены положения пружинного и математического маятников в моменты времени  $0; T/4, T/2, 3T/4, T$  с.

Из уравнения (3.3) следует, что

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad \text{или} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0. \quad (3.4)$$

Это уравнение гармонического колебания получено чисто кинематически из рассмотрения связи ускорения  $a$  со смещением  $x$ .

Физическая природа сил, действующих на тела, совершающих гармонические колебания, отразится в величине  $\omega_0$ , которая называется собственной частотой колебаний.

### Динамика собственных и затухающих колебаний.

Рассмотрим простейшую механическую систему – пружинный маятник (рис. 3.2).

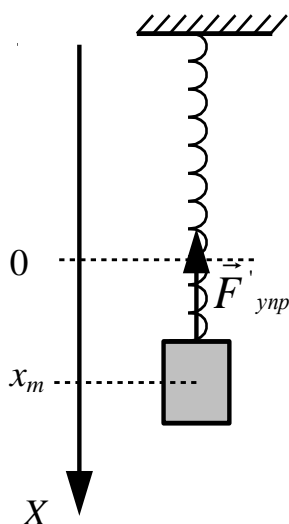


Рис. 3.2

Если подействовать на груз силой, которая вызовет смещение груза вдоль оси  $X$  и соответственно деформацию пружины, то после снятия внешней силы за счет упругой силы деформации  $F'_{упр} = F_{упр} - mg$  груз будет двигаться к положению равновесия ( $x=0$ ). Уравнение движения его:

$$m \vec{a} = \vec{F}'_{упр}. \quad (3.5)$$

По закону Гука  $F'_{упр} = -kx$ , где  $x$  – смещение от положения равновесия,  $k$  – коэффициент жесткости пружины. Тогда (3.5) преобразуется к виду:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

или

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0. \quad (3.6)$$

Уравнение (3.6) имеет такой же вид, как и (3.4), т.е. описывает гармоническое колебательное движение.

При этом

$$\omega^2 = \omega_0^2 = k/m \quad \text{или} \quad \omega_0 = \sqrt{k/m}$$

– собственная частота колебаний пружинного маятника.

Колебания, подобные описанным выше, называются собственными. Собственные колебания совершаются за счет энергии, первоначально сообщенной системе (при последующем отсутствии дополнительных внешних воздействий), т.е. благодаря внутренним силам, возникшим в колебательной системе.

В рассмотренном нами случае пружинного маятника в начале работа внешней силы вызывает деформацию пружины, в результате чего возникает упругая сила.

Решением уравнения (3.6) является:

$$x = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

На рис.3.2 начальная фаза  $\varphi_0 = 0$ , так как мы начали отсчет времени с момента максимальной деформации пружины, когда  $x = x_m$ .

Уравнение (3.6) описывает гармонические колебания, которые длятся бесконечно долго – **собственные или незатухающие гармонические колебания**. Но это идеализация.

В реальном случае первоначально сообщенная системе энергия будет все время расходоваться на работу против силы вязкого трения, которая обычно пропорциональна скорости ( $F_{mp} = -r \cdot v$ , где  $r$  – коэффициент сопротивления среды). Поэтому энергия колебаний будет уменьшаться, и, следовательно, будет убывать (затухать) амплитуда колебаний.

Уравнение движения при наличии трения имеет вид:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F'_{ynp} + F_{mp} = -kx - r \frac{dx}{dt}. \quad (3.7)$$

Преобразуем (3.7) к виду:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$$

или

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad (3.8)$$

где  $2\beta = r/m$ ,  $\omega_0^2 = k/m$ .

Решением уравнения (3.8) является функция  $x(t)$  вида:

$$x = x_m e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \varphi_0), \quad (3.9)$$



где  $\beta = r/2m$  – коэффициент затухания;

$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  – частота затухающих колебаний;

$\varphi_0$  – начальная фаза колебаний (при  $t = 0$ );

$x_m e^{-\beta t}$  – амплитуда колебаний в момент времени  $t$ .

Таким образом, уравнение (3.8) и его решение (3.9) описывают реальный процесс – свободные или затухающие гармонические колебания.

При затухающих колебаниях отношение амплитуд колебаний, отделенных друг от друга интервалом времени в один период ( $T$ ), служит характеристикой колебательного процесса.

Пусть

$$x_1 = x_m e^{-\beta t} \text{ и } x_2 = x_m e^{-\beta(t+T)},$$

тогда  $x_1 / x_2 = e^{-\beta t} / e^{-\beta(t+T)} = e^{\beta T}$

или  $\ln(x_1 / x_2) = \beta T = \delta$  – логарифмический декремент затухания.

Закон убывания амплитуды со временем ( $A(t)$ ) можно записать через логарифмический декремент затухания:

$$A(t) = x_m \exp(-\delta t/T). \quad (3.10)$$

Поясним, чем полезно введение величины  $\delta$ . Рассмотрим интервал времени  $\Delta t$ , за который амплитуда колебаний упадет в  $e$  раз, за это же время система совершит  $N$  колебаний, причем  $N = \Delta t/T$ .

Тогда из (3.10), подставив вместо  $t$   $\Delta t = NT$ , получим

$$A(t) = x_m e^{-\delta N} = x_m e^{-1},$$

откуда  $\delta = 1/N$ .

Таким образом, логарифмический коэффициент затухания обратно пропорционален числу колебаний, за которые амплитуда уменьшится в  $e$  раз.

Для характеристики колебательной системы часто употребляется величина, называемая **добротностью  $Q$** :

$$Q = 2\pi W(t) / \Delta W(t), \quad (3.11)$$

где  $W(t)$  – энергия, запасенная в системе в момент времени  $t$ ,

$\Delta W(t) = W(t) - W(t+T)$  – энергия, теряемая системой за период.

Так как  $Q$  является одной из важнейших характеристик колебательной системы, то найдем аналитическое выражение добротности через ранее введенные величины.

Поскольку  $W(t) = kA^2(t)/2$  и  $\Delta W(t) = k(A^2(t) - A^2(t+T))/2$ , то, подставив значения  $A(t)$  и  $A(t+T)$  из (3.10) в (3.11), получим:

$$\begin{aligned} Q &= 2\pi [x_m \exp(-\delta t/T)]^2 / [x_m (\exp(-\delta t/T) - \exp(-\delta(t+T)/T))]^2 = \\ &= 2\pi / [1 - \exp(-2\delta)] = 2\pi / (1 - 1 + 2\delta) = \pi / \delta = \pi N, \end{aligned} \quad (3.12)$$

т.к. обычно  $\delta \ll 1$  и  $\exp(-2\delta) \approx 1 - 2\delta$ .

Таким образом, добротность колебательной системы прямо пропорциональна числу колебаний системы, совершаемых за время убыли амплитуды колебаний в  $e$  раз.

### Волны в упругой среде, поперечные и продольные волны

Колебания, возбужденные в какой-либо точке упругой среды, распространяются в ней с конечной скоростью, зависящей от свойств этой среды, передаваясь от одной точки среды к другой. Чем дальше расположена точка среды от источника колебаний, тем позднее она начнет колебаться.

Процесс распространения колебаний в среде (периодический во времени и в пространстве) называется **волновым процессом**, или волной. При распространении волны частицы среды не движутся вместе с волной, а совершают колебания около своих положений равновесия. Волна – это передача от частицы к частице упругой среды состояния колебательного движения и его энергии.

Упругие волны бывают продольными и поперечными. В **продольных волнах** частицы среды колеблются в направлении распространения волны, а в **поперечных** – в плоскостях, перпендикулярных направлению распространения.

Вид упругой волны (продольная или поперечная), распространяющейся в среде, зависит от типа деформаций, присущих данной упругой среде. Продольные упругие волны, связанные с деформациями сжатия и растяжения, возможны в любых телах: твердых, жидких и газообразных. Поперечные же упругие волны возможны только в твердых телах, которым присуща деформация сдвига, либо на границе раздела двух сред.

Скорость распространения продольных  $v_{||}$  и поперечных  $v_{\perp}$  упругих волн в твердых телах равна:

$$v_{||} = \sqrt{E/\rho} , \quad v_{\perp} = \sqrt{G/\rho} , \quad (3.13)$$

где  $E$  и  $G$  – модуль Юнга и модуль сдвига, соответственно;  $\rho$  – плотность вещества.

Упругие продольные волны в газе распространяются со скоростью:

$$v = \sqrt{\gamma \cdot RT/\mu} , \quad (3.14)$$

где  $\mu$  – молярная масса газа,  $T$  – абсолютная температура,  $R = 8,31$  Дж/моль·К – универсальная газовая постоянная,  $\gamma$  – коэффициент Пуассона, безразмерная величина, связанная с теплоемкостью газа, для воздуха  $\gamma = 1,4$ .

При  $T = 273$  К ( нуль градусов по шкале Цельсия ) скорость звука в воздухе  $v = v_0 = 330$  м/с; при другой температуре скорость, как видно из (3.14), равна:

$$v = v_0 \sqrt{T/T_0} . \quad (3.15)$$

## Уравнение плоской бегущей волны

Если в среде беспрепятственно распространяется одна единственная волна, то её называют **бегущей**.

Для составления уравнения волны рассмотрим одномерную поперечную волну, распространяющуюся вдоль оси  $X$  со скоростью  $v$  (рис. 3.3).

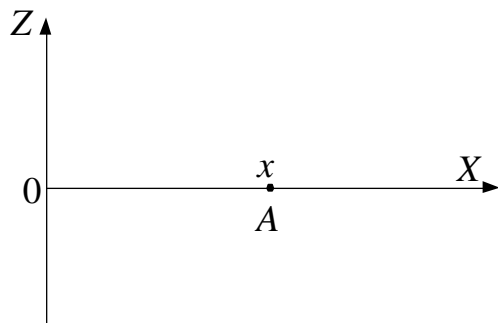


Рис. 3.3

Точка в начале координат ( $x = 0$ ) движется по закону  $z = z_m \cos \omega t$ . До точки  $A$  колебания дойдут за время  $\tau = x/v$ .

Поэтому движение точки  $A$  будет происходить по закону:

$$z_A = z_m \cos [\omega(t-\tau)] = z_m \cos[\omega(t-x/v)] = z_m \cos(\omega t - \omega x/v) = z_m \cos(\omega t - kx), \quad (3.16)$$

где  $(\omega t - kx)$  – фаза колебания;  $k = \omega/v = 2\pi/(v \cdot T) = 2\pi/\lambda$  – волновое число,

определяющее число длин волн, укладывающихся на отрезке длиной  $2\pi$  метров (подобно этому циклическая частота  $\omega$  определяет число периодов, «укладывающихся» на отрезке времени  $2\pi$  секунд).

**Длина волны  $\lambda$**  – это расстояние между ближайшими частицами среды, колеблющимися в одинаковой фазе.

Поверхность, содержащая точки, колеблющиеся в данный момент времени в одинаковой фазе, называют **волновым фронтом**. Линии, определяющие направление распространения волны, называют лучами. В однородной изотропной среде лучи перпендикулярны волновым фронтам.

Если фронт волны – плоскость, то такая волна называется плоской. Математическое описание такой волны наиболее просто и совпадает с описанием одномерной волны. Из выражения (3.16) видно, что все точки среды, в которой распространяется плоская бегущая волна, совершают колебания одинаковой амплитуды, но имеют разную начальную фазу колебаний, которая зависит от координаты  $x$ .

Если зафиксировать время  $t$ , то можно получить мгновенную фотографию волны.

Пусть при  $t=t_1$  точка  $A$  находится в положении равновесия (рис.3.4). В некоторый момент времени  $t_2 = t_1 + \Delta t$  ( $\Delta t \leq t_1, t_2$ ) положение равновесия будет проходить через точку  $A'$ , находящуюся от  $A$  на расстоянии  $\Delta x$ .

$v = \Delta x / \Delta t$  называют **фазовой** скоростью волны. При этом точка  $A$  не перемещается вдоль оси  $X$ , а перемещается данная фаза колебательного движения.

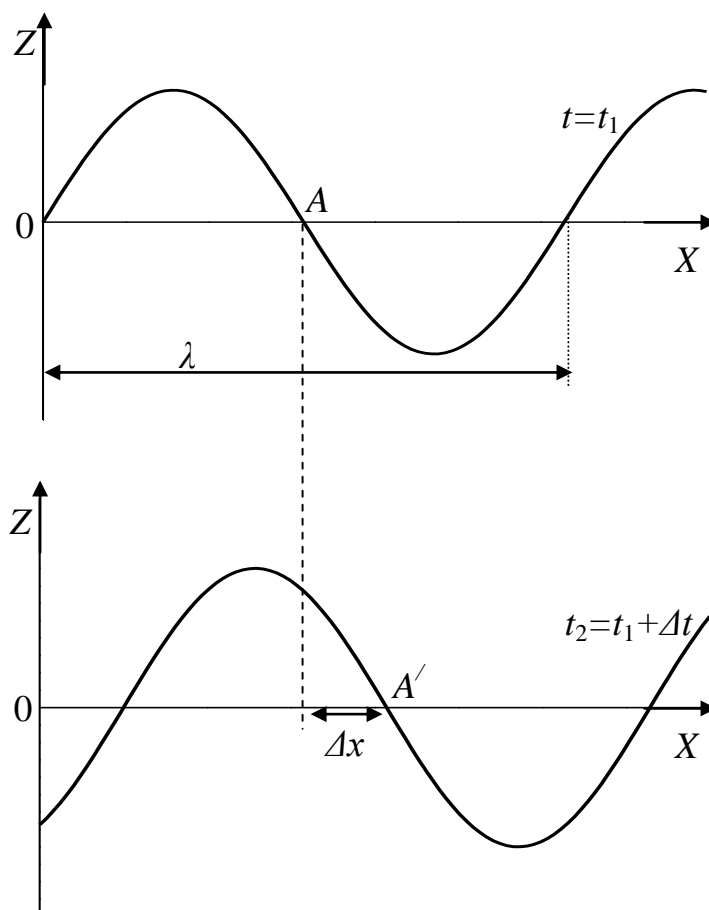


Рис. 3.4

### Стоячая волна.

Если в среде навстречу друг другу распространяются две плоских волны одинаковых частот  $\omega$  и амплитуд  $z_m$ :

$z_1 = z_m \cos(\omega t - kx)$  - волна, бегущая вдоль оси  $X$ ;

$z_2 = z_m \cos(\omega t + kx)$  - волна, бегущая в противоположном направлении; то в результате их интерференции возникает стоячая волна.

Результирующее смещение точек среды описывается уравнением:

$$z = z_1 + z_2 = 2z_m \cos kx \cos \omega t. \quad (3.17)$$

Выражение (3.17) есть уравнение стоячей волны, причем  $2z_m \cos kx$  - амплитуда колебаний точки с координатой  $x$ .

Таким образом, разные точки среды, в которой возникла стоячая волна, колеблются по гармоническому закону и имеют разную амплитуду колебаний. Точки, для которых  $\cos kx = 0$ , не совершают колебаний и называются **узлами** стоячей волны. Точки, амплитуда которых равна  $2z_m$  ( $\cos kx = 1$ ), называются **пучностями** стоячей волны.

Расстояние между ближайшими двумя узлами так же, как и между двумя ближайшими пучностями, равно  $\lambda/2$ , а между узлом и ближайшей пучностью равно  $\lambda/4$ .

Чтобы представить характер движения точек среды, в которой возбуждена стоячая волна, изобразим «моментальные фотографии» стоячей волны для нескольких моментов времени (рис. 3.5).

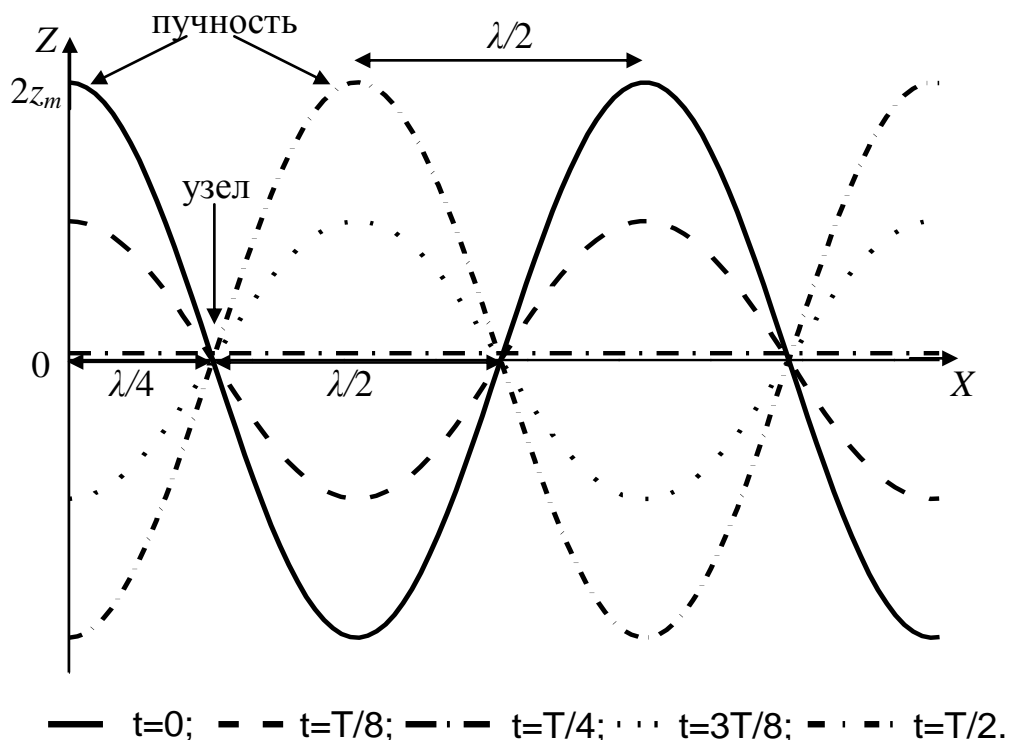


Рис. 3.5

Для сравнения приведем картину смещений в бегущей волне для тех же моментов (рис. 3.6).

В стоячей волне точки среды между двумя соседними узлами колеблются в одной фазе. При переходе через узел фаза изменяется на  $\pi$ . Максимальные амплитуды колебаний точек между узлами различны и варьируются от  $2z_m$  (в пучности) до 0 (в узле).

В бегущей волне амплитуды всех точек одинаковы, а фазы различны.

Стоячие волны можно наблюдать, когда бегущая волна распространяется в ограниченной среде. На границе среды волна отражается, и происходит сложение падающей и отраженной волн.

Если граница среды соответствует переходу из менее плотной среды в более плотную, то на границе раздела устанавливается узел стоячей волны, если наоборот – пучность.

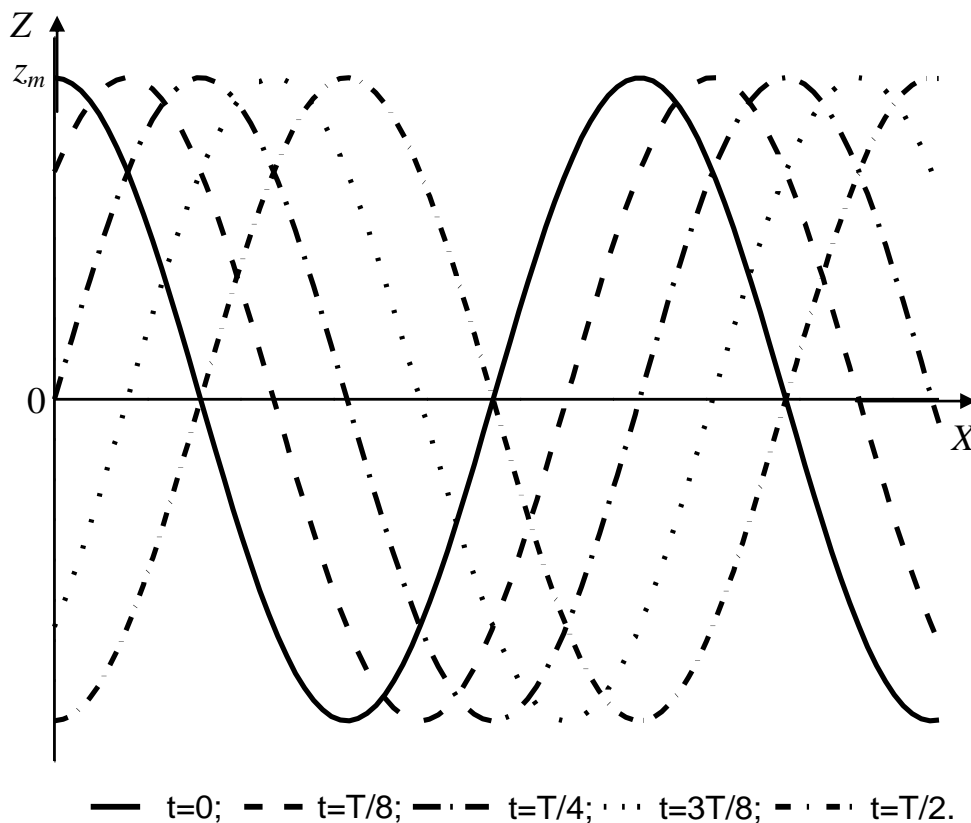


Рис. 3.6

### Примеры решения задач

**Задача 3.1.** Материальная точка совершает гармоническое колебание. Период колебаний  $T=2$  с, амплитуда  $x_{max} = 50$  мм, начальная фаза  $\varphi_0 = 0$ . Найти скорость  $v$  и ускорение  $a$  точки в момент времени, когда смещение точки от положения равновесия  $x = 25$  мм.

#### Анализ и решение

Если материальная точка совершает гармоническое колебание, то её смещение от положения равновесия изменяется по закону:

$$x = x_{max} \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (1)$$

Запишем уравнение гармонического колебания, учитывая численное условие задачи, а именно:  $x_{max} = 5 \cdot 10^{-2}$  м;  $\omega = 2\pi/T = \pi$  (рад/с);  $\varphi_0 = 0$ .

Получим  $x = 5 \cdot 10^{-2} \cos \pi t$ .

Найдем момент времени  $t_1$ , при котором  $x_1 = 2,5 \cdot 10^{-2}$  м:

$$2,5 \cdot 10^{-2} = 5 \cdot 10^{-2} \cos \pi t_1,$$

$$\cos \pi t_1 = 0,5,$$

$$\pi t_1 = \arccos 0,5 = \pi/3,$$

$t_1 = 1/3$  (с) (в пределах одного периода колебания).

Величину скорости точки  $v_1$  в момент  $t_1 = 1/3$  с найдем, подставив  $t_1 = 1/3$  с в выражение для скорости  $v = dx/dt = -\omega x_{max} \sin(\omega t + \varphi_0)$ . Тогда

$$v_1 = -5 \cdot 10^{-2} \pi \sin \pi/3 = -0,136 \text{ (м/с)}.$$

Найдем ускорение материальной точки  $a$ :

$$a = -x_{max} \omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x. \quad (2)$$

При гармоническом колебании ускорение точки находится в противофазе со смещением  $x$  (опережает смещение  $x$  на  $\pi$ ).

Ускорение  $a_1$  точки в тот момент времени, когда её смещение  $x_1 = 25$  мм, будет равно, согласно (2):

$$a_1 = -\omega^2 x_1 = -\pi^2 \cdot 2,5 \cdot 10^{-2} = -0,247 \text{ м/с}^2.$$

**Задача 3.2.** Точка участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях  $x = 2 \cos \omega t$  (м) и  $y = 2 \sin \omega t$  (м). Найти траекторию результирующего движения точки.

### Анализ и решение

Траектория движения точки, участвующей одновременно в двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаниях по оси  $X$  и оси  $Y$  с одинаковыми частотами, в общем случае (т.е. с разными начальными фазами) будет представлять собой эллипс, главные оси которого не совпадают с осями  $X$  и  $Y$ .

Запишем уравнение гармонического колебания, совершаемого точкой вдоль оси  $X$  и  $Y$ :

$$x = x_{max} \cos \omega t, \quad (1)$$

$$y = y_{max} \cos(\omega t + \varphi). \quad (2)$$

Для того чтобы получить уравнение траектории движения точки, т.е. зависимость  $y(x)$ , надо из уравнения (2) исключить параметр  $t$ .

Для этого напишем: 
$$\frac{x}{x_{max}} = \cos \omega t, \quad (3)$$

$$\frac{y}{y_{max}} = \cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi. \quad (4)$$

Умножим уравнение в (3) на  $\cos \varphi$  и вычтем из него (4). Получим:

$$\frac{x}{x_{max}} \cos \varphi - \frac{y}{y_{max}} = \sin \omega t \sin \varphi. \quad (5)$$

Теперь умножим уравнение (3) на  $\sin \varphi$ :

$$\frac{x}{x_{max}} \sin \varphi = \cos \omega t \sin \varphi. \quad (6)$$

Возведем (5) и (6) в квадрат и сложим полученные выражения. Тогда приходим к следующему уравнению:

$$\left(\frac{x}{x_{max}}\right)^2 + \left(\frac{y}{y_{max}}\right)^2 - \frac{2xy}{x_{max} \cdot y_{max}} \cos \varphi = \sin^2 \varphi. \quad (7)$$

Уравнение (7) – это уравнение траектории результирующего движения материальной точки. Это – уравнение эллипса, для которого направления  $x$  и  $y$  не являются главными осями (рис. 3.7). Траектория будет лежать внутри прямоугольника со сторонами  $2A$  и  $2B$ , где  $A = x_{max}$ ;  $B = y_{max}$ .

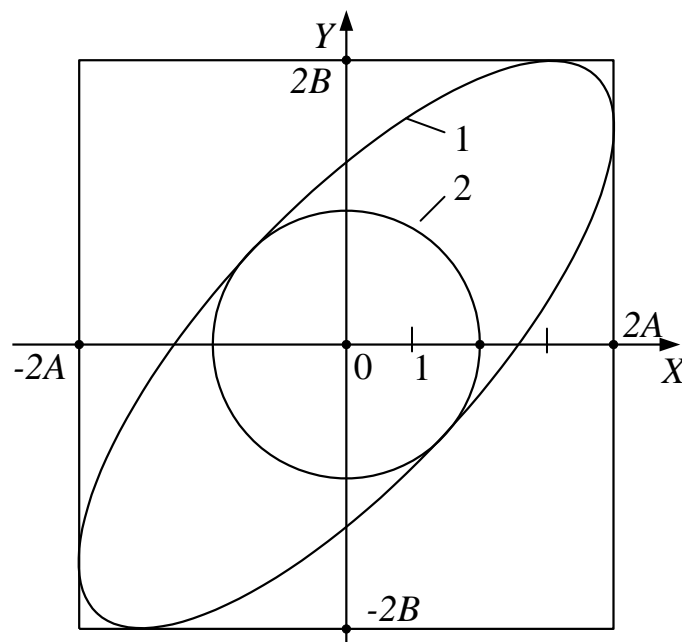


Рис. 3.7

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \varphi = \sin^2 \varphi - \text{эллипс (кривая 1)}.$$

Учтем данные задачи:

$$x = 2 \cos \omega t (\text{м}),$$

$$y = 2 \sin \omega t = 2 \cos (\omega t - \pi/2) (\text{м}).$$

В нашем случае  $A=B=2\text{м}$ ;  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ .

Запишем уравнение (7) с учетом данных условия задачи:



$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 - \frac{2xy}{2 \cdot 2} \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin^2\left(-\frac{\pi}{2}\right), \quad (8)$$

откуда:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1 \text{ или}$$

$$x^2 + y^2 = 4. \quad (9)$$

Уравнение (9) – уравнение окружности радиуса  $R=2$  м.

**Примечание:**

Мы показали, что траектория движения материальной точки, получающаяся при сложении двух взаимно перпендикулярных колебаний с одинаковыми частотами и амплитудами, но с разностью фаз  $\pi/2$  или  $-\pi/2$  является окружностью (кривая 2).

Рассмотрим другой случай. Пусть  $\varphi = 0$  или  $\varphi = \pi$ .

Тогда  $y = \pm \frac{x_{\max}}{y_{\max}} x$ . Движение происходит по прямой, проходящей через начало координат (положение равновесия) и лежащей в I и III квадрантах при  $\varphi=0$  или II и IV квадрантах при  $\varphi=\pi$ .

**Задача 3.3.** Найти период гармонических колебаний тонкого однородного стержня длины  $\ell$ , подвешенного за один из его концов.

**Анализ и решение**

Запишем уравнение движения тонкого стержня  $AB$  длиной  $\ell$ , подвешенного за один из его концов (рис. 3.8, т.С – центр масс стержня), – II закон Ньютона для вращательного движения:

$$I\varepsilon = M,$$

где  $I$  – момент инерции стержня относительно точки  $A$ , через которую проходит ось вращения (она перпендикулярна плоскости стержня), вычислен ранее (см.(2.13));

$\varepsilon$  – угловое ускорение стержня;

$M$  – суммарный момент внешних сил, действующий на стержень.

Пренебрегая трением в оси подвеса стержня, а также силой сопротивления воздуха, запишем выражение для момента силы тяжести:

$$M = -mgd,$$

где  $d$  – плечо силы тяжести  $m\vec{g}$ .

Знак « $\rightarrow$ » показывает, что момент силы тяжести является возвращающим моментом, т.е. приводит к уменьшению угла  $\varphi$  (угол поворота стержня отсчитывается от его положения равновесия против часовой стрелки). Плечо  $d$  силы тяжести стержня равно:

$$d = (\ell \sin \varphi)/2.$$

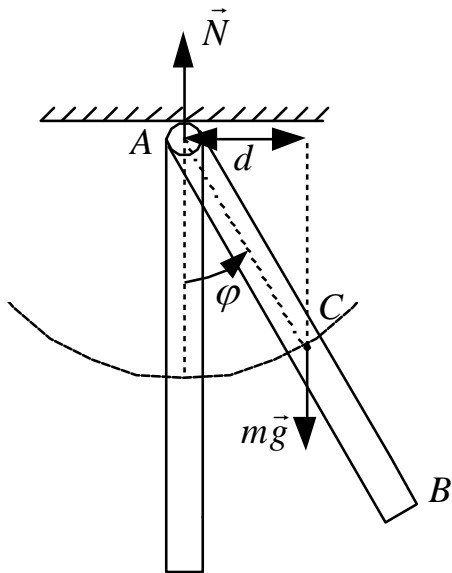


Рис. 3.8

Момент силы реакции опоры  $\vec{N}$  относительно оси вращения равен нулю, так как сила  $\vec{N}$  приложена непосредственно к оси стержня.

Окончательно запишем:

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -(mg \ell \sin \varphi) / 2.$$

Для малых углов  $\varphi$  :  $\sin \varphi = \varphi$ , тогда уравнение движения имеет вид:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{mg \ell}{2I} \varphi = 0.$$

Его решением будет гармоническая функция  $\varphi(t)$  :

$$\varphi(t) = \varphi_{max} \cos \omega_0 t, \quad (3)$$

причем частота колебания тела определяется выражением:

$$\omega_0 = \sqrt{mg \ell / 2I}. \quad (4)$$

Учитывая, что  $I = m \ell^2 / 3$  (см.(2.13)), получим, что  $\omega_0 = \sqrt{3g / 2\ell}$ , тогда

$$T = 2\pi / \omega_0 = 2\pi \sqrt{2\ell / 3g}. \quad (5)$$

#### Примечание.

Из выражения (4) нетрудно получить формулу для расчета периода колебаний математического маятника – точечной массы  $m$ , подвешенной на легкой и нерастяжимой нити длиной  $l$ . Момент инерции математического маятника относительно точки  $A$  находится по формуле:  $I = ml^2$ , а частота  $\omega_0$  – из выражения (4):

$$\omega_0 = \sqrt{mgl / I} = \sqrt{mgl / ml^2} = \sqrt{g / l}.$$

Период колебания математического маятника определяется выражением:

$$T = 2\pi / \omega_0 = 2\pi \sqrt{l / g}. \quad (6)$$

**Задача 3.4.** Какова была длина  $l_1$  стеклянного стержня в трубке Кундта, если при закреплении его посередине на длине воздушного столба  $l_2 = 0,25$  м наблюдалось  $n = 5$  пучностей при температуре  $t = 20^\circ\text{C}$ . Модуль Юнга для стекла  $E = 6,9 \cdot 10^{10}$  Па; плотность стекла  $\rho = 2,5 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. Скорость звука в воздухе при  $t = 0^\circ\text{C}$  равна  $v_0 = 332$  м/с.

### Анализ и решение

При распространении звуковой волны в воздушном столбе, ограниченном с обеих сторон, устанавливается стоячая волна (рис. 3.9). Если в воздушном столбе наблюдается  $n = 5$  пучностей, значит, на всей длине столба  $l_2$  укладывается  $5/2$  длин звуковой волны в воздухе, т.е.  $l_2 = 5/2 \lambda_{\text{возд}}$ .

Частоту звуковой волны в воздухе  $\nu_1$  находим из выражения:

$$\nu_1 = v_{\text{возд}} / \lambda_{\text{возд}}. \quad (1)$$

Такое же значение имеет частота продольной звуковой волны, возбуждаемой в стеклянном стержне. Длина волны в этом стержне соответствует частоте основного тона, т.е. если стержень длиной  $l_1$  закреплен посередине, то

$$\lambda_{\text{ст}} = 2 l_1. \quad (2)$$

Тогда

$$\nu_1 = v_{\text{ст}} / \lambda_{\text{ст}} = v_{\text{ст}} / 2 l_1.$$

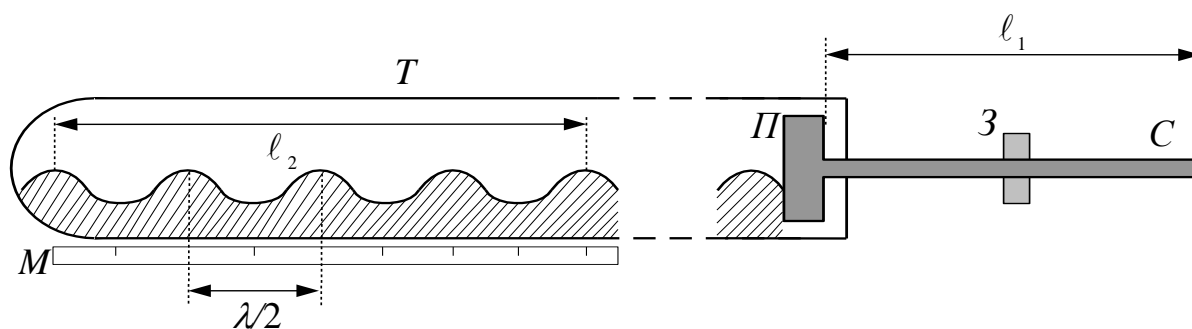


Рис. 3.9

Приравнявая (1) и (2), получим выражение для расчета длины стержня  $l_1$ :

$$l_1 = v_{\text{ст}} \lambda_{\text{возд}} / 2 v_{\text{возд}}. \quad (3)$$

Запишем выражение для расчета скорости продольной звуковой волны в стеклянном стержне.

Скорость звука в воздухе при  $t = 20^\circ\text{C}$  определяется следующим образом:

$$v_{\text{возд}} = v_0 \sqrt{(273+20)/273}. \quad (4)$$

Окончательно запишем расчетное выражение для длины  $l_1$  стеклянного стержня:

$$l_1 = \frac{\sqrt{E/\rho_{\text{ст}}}}{5 \cdot 2 \cdot v_0 \cdot \sqrt{293/273}} \cdot 2 l_2 = \frac{l_2}{5 v_0} \sqrt{E \cdot 273 / \rho_{\text{ст}} \cdot 293}. \quad (5)$$

Подставив числовые данные из условия задачи, определим величину  $l_1$ :

$$l_1 = 0,76 \text{ м.}$$

## ТЕМА 4

### МЕХАНИКА ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

#### Идеальная жидкость. Законы Паскаля и Архимеда

Движение жидкостей и газов подчиняется законам механики Ньютона. Однако, в отличие от твердых тел, жидкости и газы не сопротивляются изменению формы и имеют форму сосуда, в котором находятся. Поэтому их движение обладает рядом особенностей.

Хотя жидкость не обладает упругостью формы, для нее характерна большая упругость объема. В технических расчетах жидкость, как правило, считается несжимаемой. Если плотность жидкости мало зависит от внешнего давления, то плотность газов от давления зависит существенным образом. Однако во многих опытах сжимаемостью газа также можно пренебречь и пользоваться единым понятием **несжимаемой жидкости** – жидкости, плотность которой всюду одинакова и не изменяется со временем. Это первая идеализация, которая вводится в гидроаэромеханике. Вторая – **отсутствие вязкости**, т.е. трения между отдельными слоями движущейся жидкости или газа. Такая жидкость называется идеальной.

Степень сжатия жидкости или газа определяет величину тех сил, с которыми отдельные части жидкости или газа действуют друг на друга или на соприкасающиеся с ними тела. Они подобны силам, действующим в деформированном твердом теле. Однако в жидкостях и газах невозможна деформация сдвига, а упругие силы обусловлены только деформациями сжатия. Поэтому сила  $\Delta F$ , действующая со стороны одного элемента на другой, всегда нормальна к площадке  $\Delta S$ , на которую она действует.

Величина  $P = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S}$  называется **давлением** в жидкости или газе.

Такой механизм давления в жидкости и газе обусловлен хаотическим характером движения их атомов и молекул, в то время как в твердом теле они занимают всегда определенное положение в пространстве.

Благодаря хаотическому движению частиц жидкости **внешнее давление на жидкость передается во все стороны равномерно** (закон Паскаля). Единица давления – Паскаль (Па).

$$1 \text{ Па} = 1 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}.$$

Вес жидкости влияет на распределение давления по вертикали внутри покоящейся несжимаемой жидкости. Давление, создаваемое жидкостью на глубине  $h$  от поверхности жидкости – гидростатическое давление, равно:

$$P = \rho gh, \quad (4.1)$$

где  $\rho$  – плотность жидкости.

Следствием закона Паскаля и существования гидростатического давления является закон Архимеда: **тело, погруженное в жидкость или газ, испытывает действие выталкивающей силы, равной весу вытесненной им жидкости.**

Действительно, силы давления жидкости на каждый элемент поверхности погруженного тела нормальны к этому элементу, и тем больше, чем ниже расположен этот элемент. Рассмотрим кубик (рис.4.1) объемом  $V = S(h_2 - h_1)$ . На верхнюю и нижнюю его поверхности  $S$  действуют соответственно силы  $F_1$  и  $F_2$  (силы, действующие на боковые поверхности кубика одинаковы и компенсируют друг друга, и мы их не приводим;  $P_0$  – внешнее давление).

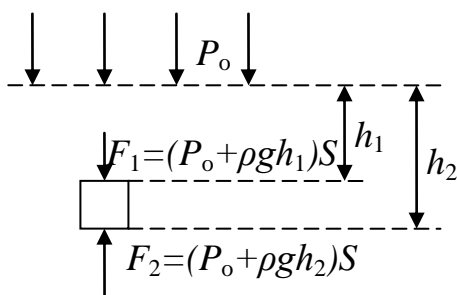


Рис. 4.1

Равнодействующая сил  $F_1$  и  $F_2$  равна:

$$F = F_2 - F_1 = (P_0 + \rho g h_2)S - (P_0 + \rho g h_1)S = \rho g V, \quad (4.2)$$

т.е. весу жидкости в объеме тела и всегда направлена вверх. Это и есть **выталкивающая сила.**

### Стационарное слоистое течение жидкости. Уравнение неразрывности струи

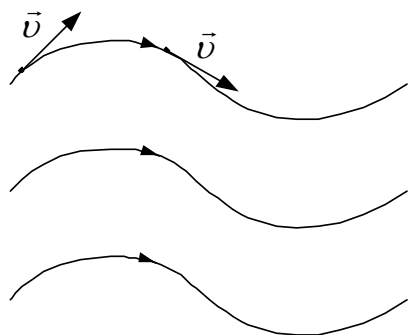


Рис. 4.2

Движение жидкости называется течением. Графически течение жидкости изображается с помощью **линий тока**, которые проводятся так, что касательные к ним совпадают по направлению с вектором скорости жидкости в соответствующих точках пространства (рис. 4.2). Часть жидкости, ограниченная линиями тока, называется **трубкой тока**.

Течение жидкости называется **стационарным**, или установившимся, если форма и расположение линий тока, а также значения скоростей в каждой ее точке не изменяются со временем. При стационарном течении линии тока совпадают с траекториями частиц.

При стационарном течении идеальной жидкости за время  $dt$  через сечение  $S$  проходит объем жидкости  $V = S v dt$ , где  $v$  – скорость течения жидкости.

Тогда объем жидкости, проходящей через поперечное сечение  $S$  в единицу времени, или расход воды  $Q$ , равен:

$$Q = S v.$$

Поскольку жидкость практически несжимаема, то через любое сечение потока в единицу времени проходит одинаковый объем жидкости, т.е.

$$Q = S v = \text{const.} \quad (4.3)$$

Соотношение (4.3) называется **уравнением неразрывности струи**. Оно показывает, что если сечение потока переменное, то частицы жидкости движутся с ускорением.

### Уравнение Бернулли

Рассмотрим стационарное течение идеальной жидкости, выделив из потока трубку тока, ограниченную сечениями  $S_1$  и  $S_2$  (рис.4.3).

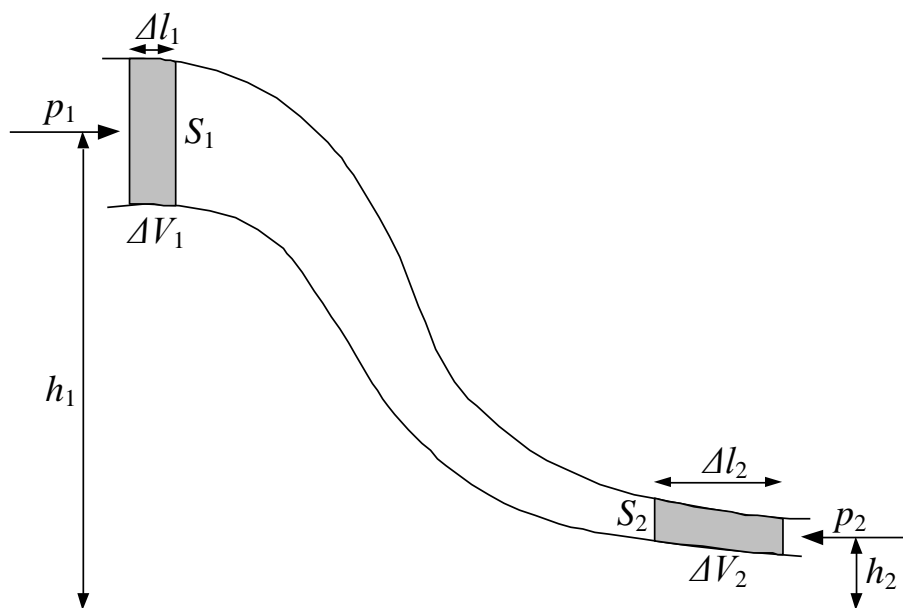


Рис. 4.3

Объемы жидкости, проходящие через эти сечения за одинаковый малый промежуток времени  $\Delta t$  равны  $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$  (заштрихованные объемы), так как всем частицам в выделенных объемах  $\Delta V_1$  и  $\Delta V_2$  можно приписать одинаковые значения скоростей  $v_1$  и  $v_2$ , а  $\Delta V_1 = S_1 \Delta l_1 = S_1 v_1 \Delta t = Q \Delta t$  и  $\Delta V_2 = S_2 \Delta l_2 = S_2 v_2 \Delta t = Q \Delta t$ .

Тогда изменение полной энергии объемов жидкости, прошедшей от сечения  $S_1$  и  $S_2$ , равно:

$$\Delta E = \left( \frac{\rho \Delta V v_2^2}{2} + \rho \Delta V g h_2 \right) - \left( \frac{\rho \Delta V v_1^2}{2} + \rho \Delta V g h_1 \right), \quad (4.4)$$

где  $\rho \Delta V$  – масса жидкости в объеме  $\Delta V$ .

Силы трения в идеальной жидкости отсутствуют, поэтому приращение энергии равно работе внешних сил давления  $P_1$  и  $P_2$ , т.е.  $\Delta E = A$ :

$$A = P_1 S_1 \Delta l_1 - P_2 S_2 \Delta l_2 = (P_1 - P_2) \Delta V. \quad (4.5)$$

Учитывая (4.4), запишем:

$$(P_1 - P_2) \Delta V = \left[ \left( \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 \right) - \left( \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 \right) \right] \Delta V$$

или

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + P_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + P_2.$$

Поскольку сечения в трубке тока были выбраны произвольно, то в общем виде можно записать:

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + P = const. \quad (4.6)$$

Это - уравнение Бернулли. Оно является выражением закона сохранения энергии применительно к установившемуся течению идеальной жидкости. Оно хорошо выполняется и для реальных жидкостей, внутреннее трение в которых невелико.

Величина  $P$  в формуле (4.6) называется **статическим давлением** (давление жидкости на поверхность обтекаемого ею тела), величина  $\rho v^2 / 2$  – **динамическим давлением**, величина  $\rho g h$  представляет собой **гидростатическое давление**.

Для горизонтальной трубки тока ( $h_1 = h_2$ ) уравнение Бернулли принимает вид:

$$\frac{\rho v_2^2}{2} + P = P_0 = const, \quad (4.7)$$

где  $P_0$  – полное давление в горизонтальной трубке жидкости.

Следствия из уравнения Бернулли рассмотрены в задачах 4.1, 4.3, 4.4.

### Течение вязкой жидкости

**Вязкость** или внутреннее трение – это свойство реальных жидкостей оказывать сопротивление перемещению одной части жидкости относительно другой. При перемещении одних слоев реальной жидкости относительно других возникают силы внутреннего трения, направленные по касательной к

поверхности слоев. Сила внутреннего трения  $F_{mp}$  тем больше, чем больше рассматриваемая поверхность слоя  $S$ , и зависит от того, насколько быстро меняется скорость течения жидкости при переходе от слоя к слою, т.е. в направлении, перпендикулярном скорости течения жидкости. Таким образом, модуль силы внутреннего трения равен:

$$|\vec{F}_{mp}| = \eta \left| \frac{d\vec{v}}{dx} \right| S, \quad (4.8)$$

где  $\eta$  – коэффициент вязкости.

Распределение скоростей в реальном потоке вязкой жидкости, текущей по трубе радиуса  $R$ , имеет вид, представленный на рис.4.4.

На стенках трубы скорость равна нулю, на оси трубы она максимальна.

Объем реальной жидкости  $Q$ , протекающей через поперечное сечение трубы в единицу времени, был вычислен Пуазейлем. Рассмотрение ведется для течения жидкости по горизонтальной трубе неизменного сечения с независимой от времени скоростью. Пуазейль получил закон распределения скоростей по сечению трубы:

$$v(x) = \frac{\Delta P}{l} \cdot \frac{R^2 - x^2}{4\eta},$$

где  $\frac{\Delta P}{l}$  – перепад статического давления в движущейся жидкости на единицу длины.

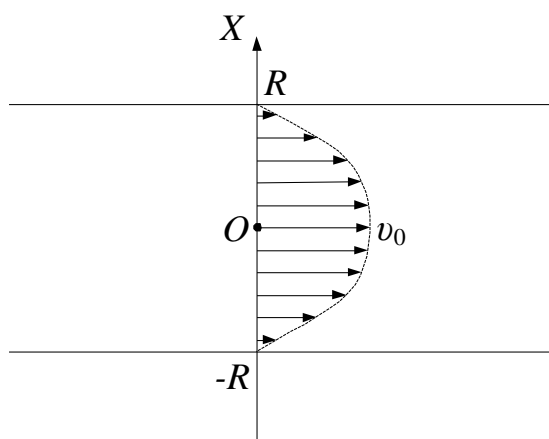


Рис. 4.4

Из зависимости  $v(x)$  следует, что максимальная скорость будет на оси трубы:

$$v_0 = \frac{\Delta P}{l} \cdot \frac{R^2}{4\eta}.$$

Объем жидкости  $V$ , протекающей в единицу времени через поперечное сечение трубы, равен  $V = S \cdot v_{cp}$ , где  $v_{cp}$  – средняя по поперечному сечению трубы скорость:

$$v_{cp} = \frac{v_0 + v_{при\ x=R}}{2} = \frac{\Delta P}{l} \cdot \frac{R^2}{8\eta}.$$

Тогда получим

$$Q = S \cdot v_{cp} = \frac{\Delta P}{l} \cdot \frac{R^2}{8\eta} \cdot \pi R^2 = \frac{\Delta P}{8\eta l} \cdot \pi R^4. \quad (4.9)$$

Формула Пуазейля (4.9) используется для определения коэффициента вязкости жидкости и газа.



Способ определения вязкости жидкости методом Стокса рассмотрен в задаче 4.2.

### Примеры решения задач

**Задача 4.1.** Вода протекает через трубку АВ (рис. 4.5). Ежеминутный расход воды в трубке АВ составляет 15 л. Площадь поперечного сечения широкой части трубки АВ равна  $2 \text{ см}^2$ , а узкой её части и трубки авс равна  $0,5 \text{ см}^2$ . Найти разность уровней  $\Delta h$  ртути, налитой в трубку авс.

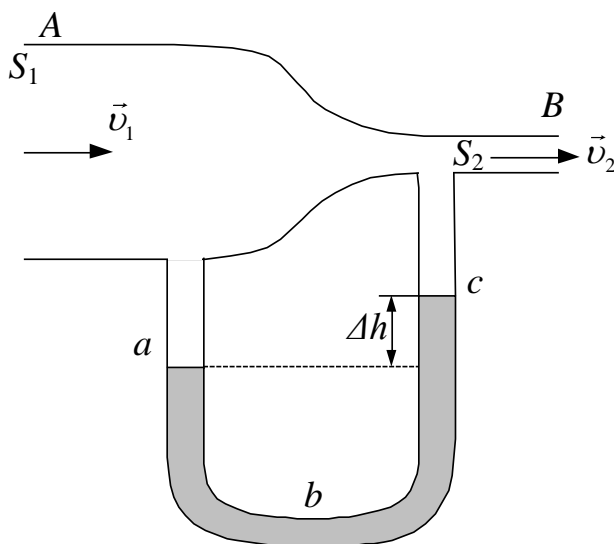


Рис. 4.5

### Анализ и решение

При нормальных условиях воду можно считать идеальной жидкостью, установившееся течение которой подчиняется уравнению Бернулли. Запишем уравнение Бернулли для двух сечений  $S_1$  и  $S_2$ :

$$P_1 + \rho_{\text{вод}} \cdot v_1^2 / 2 = P_2 + \rho_{\text{вод}} \cdot v_2^2 / 2, \quad (1)$$

где  $P_1$  и  $P_2$  – статическое давление соответственно в сечениях  $S_1$  и  $S_2$ ;  $v_1$  и  $v_2$  – скорости движения жидкости в этих сечениях,  $\rho_{\text{вод}}$  – плотность воды.

Так как через любое поперечное сечение трубы в единицу времени проходят равные объемы воды (расход воды  $Q$ ), то

$$Q = S_1 v_1 = S_2 v_2. \quad (2)$$

Из (1) имеем:

$$P_1 - P_2 = \rho_{\text{вод}} \cdot (v_2^2 - v_1^2) / 2. \quad (3)$$

Преобразуем (3), умножив и разделив почленно правую часть на  $S_2^2$  и  $S_1^2$

$$P_1 - P_2 = \frac{\rho_{\text{вод}}}{2} \cdot \left( \frac{v_2^2 \cdot S_2^2}{S_2^2} - \frac{v_1^2 \cdot S_1^2}{S_1^2} \right). \quad (4)$$

Учитывая соотношение (2), получим:

$$P_1 - P_2 = \frac{\rho_{\text{вод}} \cdot Q^2}{2} \left( \frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2} \right). \quad (5)$$

Из рис. 4.5 видно, что сечение трубки  $abc$  расположено параллельно вектору скорости течения воды в трубке  $AB$ , следовательно, разность уровней воды  $\Delta h$  в трубке  $abc$  характеризует разность статического давления в сечениях  $S_1$  и  $S_2$ , а именно:

$$P_1 - P_2 = (\rho_{\text{рт}} - \rho_{\text{вод}}) g \Delta h. \quad (6)$$

Используя (5) и (6), находим искомую величину  $\Delta h$ :

$$\Delta h = \frac{\rho_{\text{вод}} Q^2}{2g(\rho_{\text{рт}} - \rho_{\text{вод}})} \left( \frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2} \right). \quad (7)$$

Подставляя в (7) данные из условия задачи (предварительно необходимо определить расход воды в трубке  $AB$ :  $Q = 15 \text{ л} / 60 \text{ с} = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3/\text{с}$ ), получим численное значение искомой величины  $\Delta h$ :

$$\Delta h = \frac{10^3 \cdot 2,5^2 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 9,8 \cdot 10^3 (13,6 - 1)} \cdot \left( \frac{1}{0,5^2 \cdot 10^{-3}} - \frac{1}{2^2 \cdot 10^{-3}} \right) = 9,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

**Задача 4.2.** Стальной шарик диаметром 1 мм падает с постоянной скоростью 0,185 см/с в большом сосуде, наполненном касторовым маслом ( $\rho_{\text{ст}} = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$ ;  $\rho_{\text{каст}} = 9 \cdot 10^2 \text{ кг}/\text{м}^3$ ). Найти динамическую и кинематическую вязкость касторового масла.

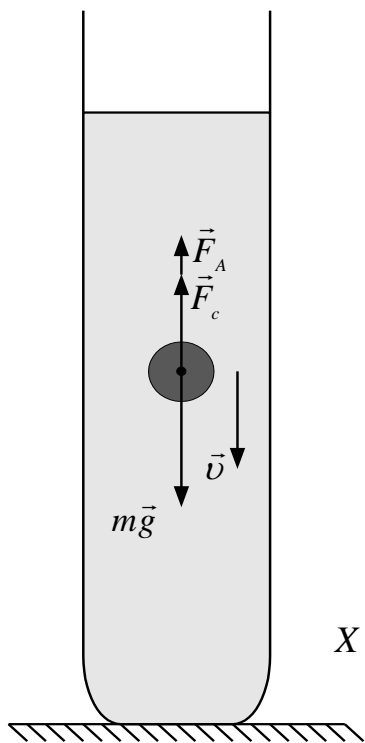


Рис. 4.6

### Анализ и решение

Рассмотрим силы, действующие на шарик при его падении в вязкой жидкости (рис. 4.6), и запишем уравнение движения шарика

$$m\vec{g} + \vec{F}_A + \vec{F}_c = m\vec{a}, \quad (1)$$

где  $m\vec{g}$  – сила тяжести стального шарика;  $\vec{F}_A$  – архимедова сила;  $\vec{F}_c$  – сила сопротивления движению в вязкой жидкости.

Так как по условию задачи шарик падает с постоянной скоростью  $v = \text{const}$ , то ускорение  $\vec{a}$  шарика равно нулю.

Раскроем величины, стоящие в левой части уравнения (1):

$$mg = \rho_{\text{ст}} V_{\text{ш}} g, \quad (2)$$

$$F_A = \rho_{\text{жидк}} V_{\text{ш}} g, \quad (3)$$

где  $V_{\text{ш}}$  – объем шарика.

Сила сопротивления, которую испытывает падающий в вязкой жидкости шарик, определяется формулой Стокса:

$$F_C = 6\pi \cdot \eta R \cdot v, \quad (4)$$

где  $\eta$  – динамическая вязкость жидкости;  $R$  – радиус шарика.

Следует заметить, что закон Стокса применим только для стационарного течения жидкости. Окончательно переходя к проекциям на ось  $X$ , получим:

$$\rho_{\text{жидк}} V_{\text{ш}} g - \rho_{\text{ш}} V_{\text{ш}} g - 6\pi \cdot \eta R \cdot v = 0. \quad (5)$$

Выражение для  $\eta$  имеет вид:

$$\eta = V_{\text{ш}} g (\rho_{\text{ш}} - \rho_{\text{жидк}}) / (6\pi R v).$$

Учитывая, что

$$V_{\text{ш}} = 4\pi R^3 / 3 = \pi D^3 / 6,$$

окончательно получим:

$$\eta = g D^2 (\rho_{\text{ш}} - \rho_{\text{жидк}}) / (18 v) = 2 \text{Па} \cdot \text{с}.$$

Найдем величину кинематической вязкости  $\nu$  жидкости:

$$\nu = \eta / \rho_{\text{жидк}} = 2,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}.$$

**Задача 4.3.** По горизонтальной трубе  $AB$  (рис. 4.7) течет жидкость. Разность уровней этой жидкости в трубках  $a$  и  $b$  равна 10 см. Найти скорость течения жидкости.

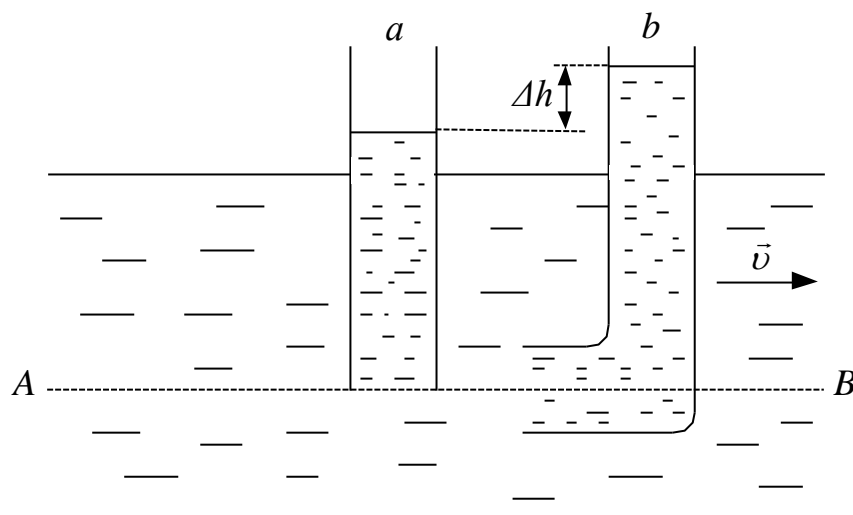


Рис. 4.7

### Анализ и решение

Для определения скорости течения жидкости по трубе  $AB$  необходимо знать величину динамического давления  $\rho v^2 / 2$ , где  $\rho$  – плотность жидкости,  $v$  – скорость течения жидкости. Изображенные на рисунке 4.7 трубки  $a$  и  $b$  позволяют найти эту величину. Для измерения полного давления  $P_0$  служит трубка  $b$  (трубка Пито), а для измерения величины статического давления  $P$  – трубка  $a$  (зонд). Полное давление в трубке  $AB$  равно:

$$P_0 = P + \rho v^2 / 2. \quad (1)$$

Отсюда получим, что

$$\rho v^2 / 2 = P_0 - P, \quad (2)$$

$$v = \sqrt{2(P_0 - P) / \rho}.$$

Величина  $(P_0 - P)$  может быть найдена по разнице уровней в трубках  $a$  и  $b$ , а именно:

$$P_0 - P = \rho g \Delta h. \quad (3)$$

Тогда имеем:

$$v = \sqrt{2g \Delta h}.$$

Подставляя данные из условия задачи, находим численное значение скорости жидкости в трубке  $AB$ :

$$v = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 0,1} = 1,4 \text{ м/с}.$$

**Задача 4.4.** В дне цилиндрического сосуда имеется круглое отверстие диаметром  $d = 1$  см. Диаметр сосуда  $D = 0,5$  м. Найти зависимость скорости понижения уровня воды в сосуде от высоты  $h$  этого уровня. Найти значение этой скорости для высоты  $h = 0,2$  м.

### Анализ и решение

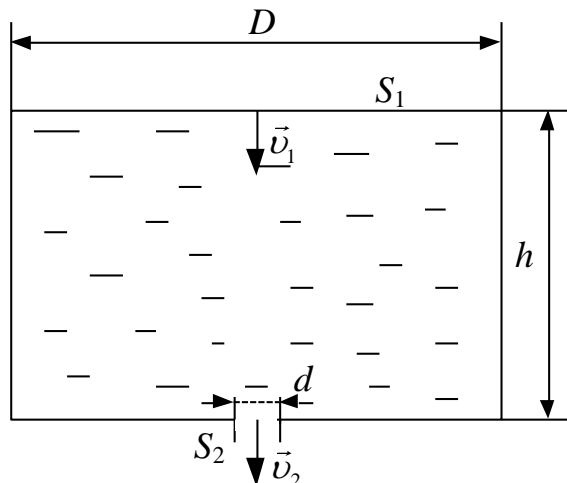


Рис. 4.8

Сделаем чертеж к задаче (рис. 4.8).

Из уравнения Бернулли следует, что

$$\rho v_1^2 / 2 + \rho g h = \rho v_2^2 / 2 \quad (1)$$

или

$$v_1^2 + 2gh = v_2^2.$$

Отметим, что при записи уравнения Бернулли (1) за условный нулевой уровень потенциальной энергии мы приняли горизонтальную

плоскость, проходящую через нижнее основание сосуда, и учли, что статическое давление у открытой поверхности воды в сосуде и у отверстия в его дне равно атмосферному.

В силу неразрывности струи имеем:

$$v_1 S_1 = v_2 S_2, \quad (2)$$

где  $S_1$  и  $S_2$  – площади поперечного сечения сосуда и отверстия соответственно;

$v_1$  – скорость течения воды в сосуде (скорость понижения уровня воды в сосуде);

$v_2$  – скорость вытекания воды из отверстия;

$\rho$  – плотность воды.

Подставляя (2) в (1) и решая относительно  $v_1$ , получим:

$$v_1 = S_2 \sqrt{2gh} / \sqrt{S_1^2 - S_2^2}. \quad (3)$$

Учитывая, что  $S_1 = \pi D^2 / 4$  и  $S_2 = \pi d^2 / 4$ , окончательно имеем:

$$v_1 = d^2 \sqrt{2gh} / \sqrt{D^2 - d^2}.$$

Так как  $d \ll D$ , то

$$v_1 \approx d^2 \sqrt{2gh} / D. \quad (4)$$

При  $h = 0,2$  м,  $v_1 = 8 \cdot 10^{-4}$  м/с.

Таким образом, скорость понижения уровня жидкости в сосуде мала. При условии  $d \ll D$  ею можно пренебречь, тогда уравнение (1) примет вид:

$$\rho gh = \rho v_2^2 / 2, \quad (5)$$

откуда

$$v_2 = \sqrt{2gh}. \quad (6)$$

В нашем случае получим, что  $v_2 = 2$  м/с, следовательно, при условии малости отверстия в сосуде частицы жидкости вытекают из отверстия с такой скоростью, как если бы они упали с высоты  $h$ . При этом надо учесть, что выражение (6) получено для идеальной жидкости, лишенной внутреннего трения. Вода обладает малым внутренним трением, вязкие же жидкости (разные жидкие масла) совершенно не подчиняются формуле (6).

**Задача 4.5.** В боковую поверхность цилиндрического сосуда радиусом  $R = 2$  см вставлен горизонтальный капилляр внутренним радиусом  $r = 1$  мм и длиной  $l = 2$  см. В сосуд налито касторовое масло, динамическая вязкость которого  $\eta = 2$  Па·с. Найти зависимость скорости  $v$  понижения уровня касторового масла в цилиндрическом сосуде от высоты  $h$  этого уровня над

капилляром. Найти числовое значение этой скорости при  $h = 26$  см.

### Анализ и решение

Скорость понижения уровня касторового масла в сосуде зависит от скорости протекания масла через капилляр. Так как касторовое масло является неидеальной жидкостью, вязкостью которой пренебречь нельзя, то для течения этой жидкости справедлива формула Пуазейля (4.9). Объем жидкости (или газа) при ее ламинарном движении, протекающей за время  $t$  через капиллярную трубку радиусом  $r$  и длиной  $l$ , определяется выражением (4.9):

$$Q = \pi r^4 t \Delta P / (8l\eta), \quad (1)$$

где  $\Delta P$  – разность давлений на концах трубки.

В нашем случае величина  $\Delta P$  обусловлена гидростатическим давлением слоя жидкости, т.е.

$$\Delta P = \rho gh. \quad (2)$$

Объем жидкости, протекающей через поперечное сечение капилляра  $S_1$  за время  $t$ , можно записать следующим образом:

$$V = S_1 v_1 t = \pi r^2 v_1 t, \quad (3)$$

где  $v_1$  – скорость протекания масла через капилляр.

Из (1), (2), (3) имеем:

$$v_1 = r^2 \rho gh / (8l\eta). \quad (4)$$

Используя уравнение непрерывности струи:  $v_1 S_1 = v S$ , где  $v$  – скорость понижения уровня масла в сосуде с поперечным сечением  $S$ , окончательно получаем:

$$v = r^4 \rho g / (8l\eta R^2). \quad (5)$$

Обозначим величину  $r^4 \rho g / (8l\eta R^2)$  через  $k$ , тогда запишем:

$$v = k h. \quad (6)$$

Таким образом, скорость понижения уровня масла в цилиндрическом сосуде линейно зависит от высоты  $h$  этого уровня над капилляром. При  $h = 0,26$  м, скорость  $v$  равна:

$$v = \frac{10^{-12} \cdot 9 \cdot 10^2 \cdot 9,8 \cdot 0,26}{8 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ м/с}.$$

## ТЕМА 5

# ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ

### § 1. Введение

Молекулярная физика изучает макроскопические системы: газы, жидкости, твердые тела, плазму. Эти столь разнородные по своим свойствам вещества обладают одним общим признаком, позволяющим изучать их с единой точки зрения, – они содержат огромное число микроскопических частиц: атомов и молекул. Так, в  $1 \text{ см}^3$  воздуха или любого газа находится около  $10^{19}$  атомов или молекул, в  $1 \text{ см}^3$  твердого тела атомов или молекул больше в  $\sim 10^3 - 10^4$  раз.

Молекулы и атомы в веществе находятся в непрерывном тепловом движении, причем характер этого движения определяет, в каком состоянии – твердом, жидком или газообразном – будет находиться вещество.

Для изучения макроскопических процессов в системах, связанных с огромным числом содержащихся в них атомов и молекул, применяются два качественно различных, но взаимно дополняющих друг друга метода: статистический (молекулярно-кинетический) и термодинамический. Первый лежит в основе молекулярной физики, второй – термодинамики.

**Молекулярная физика** исходит из того, что все вещества состоят из находящихся в непрерывном движении молекул (атомов). Процессы, изучаемые молекулярной физикой, – результат взаимодействия огромного числа молекул. Свойства объединения (совокупности или ансамбля) большого числа молекул отличны от свойств отдельной молекулы и подчиняются статистическим закономерностям. Молекулярная физика объясняет температуру, давление и другие параметры состояния тел, как суммарный результат взаимодействия молекул. При этом она не интересуется движением отдельных молекул, а вводит понятия средних величин, которые характеризуют движение огромной совокупности частиц (средняя скорость, средняя энергия и т.д.) и использует их для объяснения физических явлений.

Например, в дальнейшем будет показано, что температура тела может быть выражена только через среднее значение скорости беспорядочного движения молекул. Поэтому нельзя говорить о температуре одной молекулы. Такие макроскопические характеристики тел, как температура, имеют смысл только при большом числе молекул.

**Термодинамика** – раздел физики, изучающий общие свойства макроскопических систем, находящихся в состоянии термодинамического равновесия, и процессы перехода между этими состояниями. Термодинамика не рассматривает микропроцессы, лежащие в основе этих переходов. Термодинамика базируется на нескольких фундаментальных законах (началах), установленных в результате обобщения опытных данных. Основа термодинамического метода – определение состояния термодинамической

системы, которое задается так называемыми параметрами состояния. Для газов параметрами состояния являются давление, температура и объем.

Подходя к рассмотрению изменения состояния вещества с различных позиций, термодинамика и молекулярная физика взаимно дополняют друг друга, образуя, по существу, единое целое.

## § 2. Основные положения молекулярно-кинетической теории газов.

### Идеальный газ

Из трех агрегатных состояний вещества (твердое, жидкое и газообразное) наиболее простым с точки зрения теории является газообразное. В газах силы взаимодействия между молекулами настолько малы, что при определенных условиях ими можно пренебречь. Молекулы газа находятся в беспорядочном, хаотическом движении. Об этом свидетельствует тот экспериментальный факт, что газ всегда заполняет весь предоставленный ему объем.

В молекулярно-кинетической теории пользуются моделью идеального газа, удовлетворяющей следующим условиям:

- 1) силы взаимодействия между самими молекулами газа и ими и стенками сосуда проявляются лишь при абсолютно упругих столкновениях между ними;
- 2) собственный объем молекул газа пренебрежимо мал по сравнению с объемом сосуда.

При таких допущениях молекулы газа можно считать совершенно свободными. Это значит, что между соударениями с другими молекулами или со стенками сосуда молекулы движутся прямолинейно и равномерно, как всегда движутся тела, не подверженные действию каких-либо сил.

Модель идеального газа вполне удовлетворительно описывает реальные газы (например, воздух) при условиях, близких к нормальным (при давлении в  $10^5$  Па и температуре, равной  $0^\circ\text{C}$ ).

### Уравнение состояния и законы идеального газа

Состояние заданной массы идеального газа определяется значениями трех параметров: давления  $P$ , объема  $V$  и температуры  $T$ . Оно задается уравнением Клапейрона-Менделеева:

$$PV = \frac{m}{\mu} RT, \quad (5.1)$$

где  $m$  – масса газа;

$\mu$  – молярная масса (масса одного моля газа);

$R = 8,31$  Дж/моль К – универсальная газовая постоянная.



В выражении (5.1)  $m/\mu$  – это число молей газа, содержащихся в объеме  $V$ . Для одного моля газа выражение (5.1) имеет вид:

$$PV_\mu = RT. \quad (5.2)$$

Здесь  $V_\mu$  – объем, занимаемый одним молем газа. При одинаковых  $P$  и  $T$ ,  $V_\mu$  одно и то же для всех газов (закон Авогадро). В частности, при  $P = 1 \text{ атм} = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Па}$ ,  $T = 273 \text{ К} (0^\circ\text{C})$ ,  $V_\mu = 22,4 \text{ л/моль} = 22,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{моль}$ .

Полагая один из параметров состояния газа неизменным, можно получить три закона, по которым происходит изменение состояния газа. Исторически эти законы были получены на основании опытных данных, а уравнение Клапейрона-Менделеева явилось обобщением газовых законов. Рассмотрим их, полагая массу газа постоянной.

**1. Закон Бойля-Мариотта** предполагает, что температура газа неизменна, поэтому из (5.2) следует, что

$$P V = const. \quad (5.3)$$

Графически в координатах объем – давление выражение (5.3), представляется гиперболой, которая носит название изотермы. Поскольку в законе Бойля-Мариотта температура неизменна, то его называют еще **изотермическим** законом изменения состояния газа, а соответствующий процесс изменения состояния газа – изотермическим процессом.

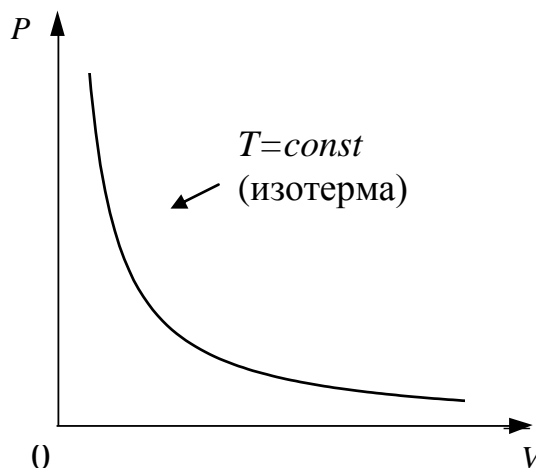


Рис.5.1

**2. Закон Шарля** предполагает объем газа неизменным. Исходя из (5.1), он может быть записан:

$$P = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{RT}{V} = const \cdot T \quad (5.4)$$

или

$$P/T = const.$$

График, который описывает **изохорический** процесс, представлен на рис. 5.2 в координатах давление – температура.

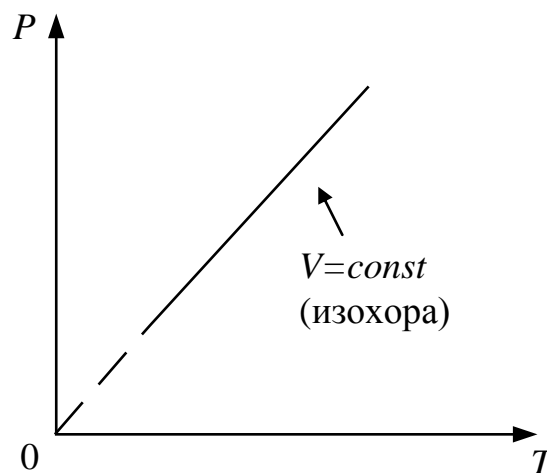


Рис.5.2

В области низких температур сплошная линия переходит в штриховую, так как при низких температурах не работает приближение идеального газа. Более того, при понижении температуры может измениться агрегатное состояние

газа, и он превратится в жидкость.

**3. Закон Гей-Люссака** рассматривает изменения объема газа с температурой при неизменном давлении  $P$  (изобарный процесс).

$$V = \text{const} \cdot T$$

или

$$V/T = \text{const}. \quad (5.5)$$

График закона Гей-Люссака представлен на рис. 5.3. Переход сплошной линии в штриховую показывает, что при малом объеме, занимаемом газом, объемом его молекул уже нельзя пренебрегать (газ перестает быть идеальным).

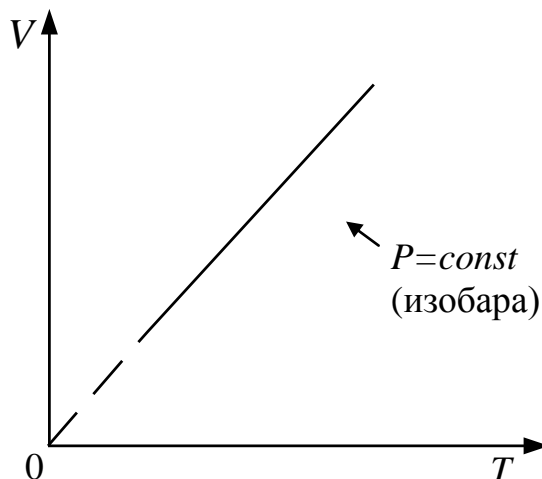


Рис.5.3

Первоначально вид законов Шарля и Гей-Люссака был иным:

$$P = P_0 [1 + \alpha(t - t_0)], \quad (5.6)$$

$$V = V_0 [1 + \beta(t - t_0)], \quad (5.7)$$

где  $\alpha$  – температурный коэффициент давления;

$\beta$  – температурный коэффициент объемного расширения;

$P_0$  и  $V_0$  берутся при  $t = t_0$ .

Эксперимент показал, что

$$\alpha = \beta = \frac{1}{273,15^\circ\text{C}}.$$

Поэтому если считать что  $t_0 = 0^\circ\text{C}$ , то закон Шарля, например можно переписать в виде

$$P = P_0 \frac{273,15^\circ\text{C} + t}{273,15^\circ\text{C}}$$

и ввести новую абсолютную температурную шкалу, связанную с температурой по шкале Цельсия, соотношением:

$$T = 273,15 + t. \quad (5.8)$$

Абсолютная температура измеряется в кельвинах (К):  $1\text{K} = 1^\circ\text{C}$ . Нуль абсолютной температуры составляет  $-273,15^\circ\text{C}$ .

В описанных выше газовых законах и в уравнении состояния идеального газа использована абсолютная температурная шкала, и температура измеряется в кельвинах.

Приведем в заключение еще одну запись уравнения состояния идеального газа (5.1).

Для этого введем новую постоянную:

$$k = \frac{R}{N_a} = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/к},$$

получившую название **постоянной Больцмана**;  $N_a = 6.022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$  – число Авогадро.

При этом уравнение (5.1) примет вид:

$$PV = \frac{m}{\mu} N_a kT = NkT, \quad (5.9)$$

здесь  $\frac{m}{\mu} N_a = N$  – полное число молекул, содержащихся в объеме  $V$  ( $\mu = m_0 N_a$ , где  $m_0$  – масса одной молекулы).

Концентрация молекул, т.е. число молекул в единице объема,  $n = N/V$ , поэтому из (5.9) следует:

$$P = nkT. \quad (5.10)$$

Таким образом, получена простая связь между температурой и давлением. Обеспечивая постоянство объема и используя в качестве температурного признака давление газа, можно получить термометр с идеально линейной температурной шкалой. Она получила название идеальной газовой шкалы температур.

### Молекулярно-кинетическое истолкование температуры и давления

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории газов связывает параметры состояния газа ( $P$  и  $T$ ) с характеристиками поступательного движения его молекул.

Стенки сосуда, в котором заключен газ, подвергаются непрерывной

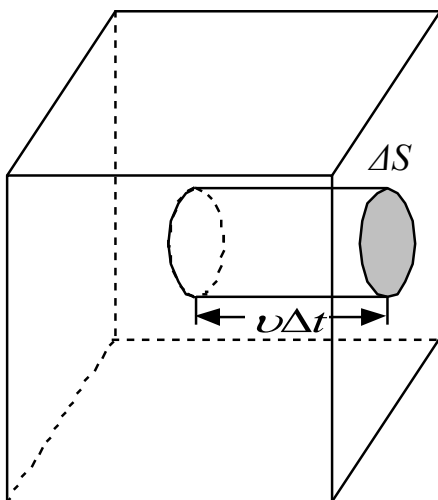


Рис.5.4

бомбардировке молекулами. В результате элементу стенки  $\Delta S$  сообщается за время  $\Delta t = 1$  с некоторый импульс  $F\Delta t$ , который численно равен силе, действующей на  $\Delta S$ . Отношение этой силы к величине  $\Delta S$  дает давление, оказываемое газом на стенки сосуда. Вследствие хаотичности движения молекул давление газа на различные участки стенок сосуда одинаково.

Рассмотрим этот процесс детально. Пусть молекула массы  $m_0$  движется со скоростью  $\vec{v}$  перпендикулярно стенке. После абсолютно упругого соударения со стенкой, молекула будет двигаться в

обратном направлении с той же скоростью. При этом молекула передает стенке импульс  $\Delta\vec{p}$ , равный изменению собственного импульса:

$$\Delta\vec{p} = m_0\vec{v} - (-m_0\vec{v}) = 2m_0\vec{v}. \quad (5.11)$$

За время  $\Delta t$  число молекул, достигших площадки  $\Delta S$  (рис. 5.4), равно:

$$n \cdot \Delta S \cdot v \cdot \Delta t,$$

где  $n$  – концентрация молекул (число молекул в единице объема).

Реально к площадке  $\Delta S$  молекулы подлетают под разными углами. Однако с учетом полной хаотичности движения можно считать, что в любой момент времени вдоль каждой из  $3^x$  осей декартовых координат движется  $1/3$  молекул, причем половина этих молекул ( $1/6$  от общего числа) движется вдоль данной оси в одну сторону, а другая половина – в противоположную. Тогда число ударов молекул, движущихся в заданном направлении, о площадку  $\Delta S$  равно:

$$\frac{1}{6} n \cdot \Delta S \cdot v \cdot \Delta t,$$

а переданный ими импульс:

$$\Delta p = 2 m_0 v \times \frac{1}{6} n \cdot \Delta S \cdot v \cdot \Delta t. \quad (5.12)$$

Тогда давление газа на стенку сосуда

$$P = \frac{\Delta p}{\Delta S \Delta t} = \frac{1}{3} n m_0 v^2. \quad (5.13)$$

Желая подчеркнуть, что под величиной  $v$  понимается средняя скорость движения молекул (хотя молекулы газа обладают безграничным набором скоростей), введем для нее обозначение  $\langle v \rangle$  и перепишем (5.13) в виде:

$$P = \frac{1}{3} n m_0 \langle v^2 \rangle = \frac{2}{3} n \frac{m_0 \langle v^2 \rangle}{2}. \quad (5.14)$$

Учитывая, что величина

$$\frac{m_0 \langle v^2 \rangle}{2} = \langle E_K \rangle$$

представляет собой среднюю кинетическую энергию поступательного хаотического движения молекул, получим:

$$P = \frac{2}{3} n \langle E_K \rangle. \quad (5.15)$$

Давление в газе, таким образом, определяется средней энергией поступательного хаотического движения молекул.

Уравнения (5.10), (5.14), и (5.15) называются основными уравнениями молекулярно-кинетической теории.

Сопоставим между собой выражения (5.10) и (5.15). Поскольку левые части (5.10) и (5.15) определяют исходя из разных предпосылок одно и то же давление газа, можно приравнять правые части этих выражений:

$$nkT = \frac{2}{3}n\langle E_K \rangle.$$

Отсюда получим, что

$$\langle E_K \rangle = \frac{3}{2}kT, \quad (5.16)$$

т.е. температура является мерой средней кинетической энергии хаотического движения молекул идеального газа. Из (5.16) следует, что при  $T = 0$  и  $\langle E_K \rangle = 0$ , т.е. при абсолютном нуле, прекращается поступательное движение молекул газа, следовательно, его давление равно нулю. Соотношение (5.16) раскрывает молекулярно-кинетический смысл понятия температуры.

Сделаем в заключение одно замечание. Поступательное движение в пространстве молекулы идеального газа (по определению атомы идеального газа являются материальными точками) описывается тремя независимыми координатами:  $X$ ,  $Y$  и  $Z$ . Поэтому говорят, что такая молекула имеет три степени свободы. Вследствие полной хаотичности движения можно, учитывая (5.16), считать, что энергия, приходящаяся на одну степень свободы,

$$\langle E_{IK} \rangle = \frac{1}{2}kT. \quad (5.17)$$

Закон распределения энергии по степеням свободы многоатомных молекул рассмотрен в [1].

### Барометрическая формула

Все предыдущее рассмотрение соответствовало отсутствию внешних сил, вследствие чего молекулы газа были в среднем равномерно распределены по объему. Однако молекулы любого газа находятся в потенциальном поле тяготения Земли. Сила тяжести с одной стороны, а тепловое движение молекул – с другой, приводят к некоторому стационарному состоянию, при котором давление убывает с высотой.

Пусть на поверхности Земли давление равно  $P_0$ , а на высоте  $h$  –  $P$  (рис. 5.5). Будем считать, что на высоте  $h+dh$  давление равно  $P+dP$ . Давление воздушного столба высотой  $dh$  равно  $\rho g \cdot dh$ , поэтому

$$P - (P+dP) = \rho \cdot g \cdot dh, \quad (5.18)$$

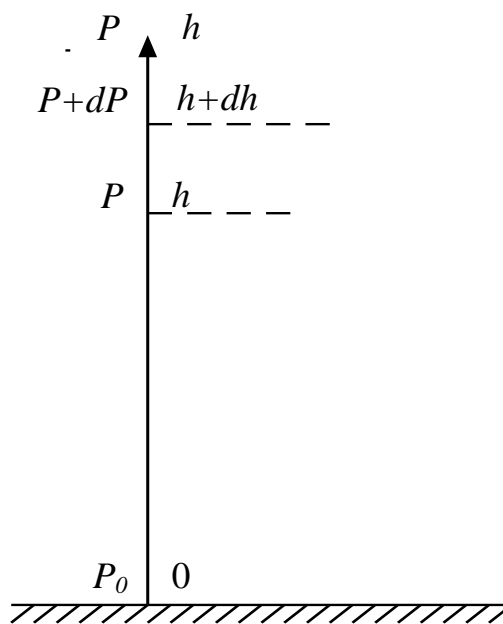


Рис.5.5

где  $\rho$  – плотность воздуха ( $\rho = m_0 n$ ,  $m_0$  – масса одной молекулы,  $n$  – концентрация).

Следовательно,

$$dP = -\rho \cdot g \cdot dh = -n \cdot m_0 g \cdot dh.$$

Исходя из основного уравнения молекулярно-кинетической теории (5.10), получим:

$$dP = -\frac{P \cdot m_0 g dh}{kT}$$

или

$$\frac{dP}{P} = -\frac{m_0 g}{kT} \cdot dh. \quad (5.19)$$

Проинтегрировав (5.19) и учтя, что при  $h = 0$ ,  $P = P_0$ , получим:

$$P = P_0 e^{-\frac{m_0 g h}{kT}}. \quad (5.20)$$

Выражение (5.20) называют **барометрической формулой**. Оно получено в предположении о неизменности с высотой температуры  $T$  и ускорения силы тяжести  $g$ , и позволяет по измерению атмосферного давления найти высоту над поверхностью Земли. (Приборы для определения высоты по давлению воздуха называются альтиметрами.)

С помощью (5.20) можно найти также изменение концентрации молекул с высотой, так как  $P = nkT$ , то

$$n = n_0 e^{-\frac{m_0 g h}{kT}}. \quad (5.21)$$

Выражение (5.21) справедливо не только в поле сил тяготения, но и в любом внешнем поле с потенциальной энергией  $U(r)$ :

$$n = n_0 e^{-\frac{U(r)}{kT}}. \quad (5.22)$$

Выражение (5.22) называется **распределением Больцмана** и показывает, что (при  $T = const$ ) концентрация молекул тем больше, чем меньше их потенциальная энергия.

### Примеры решения задач

**Задача 5.1.** Во сколько раз средняя квадратичная скорость пылинки, взвешенной в воздухе, меньше средней квадратичной скорости молекул азота? Масса пылинки  $10^{-8}$  г. Молярная масса азота равна 0,028 кг/моль.

#### *Анализ и решение*

Запишем выражение для средней кинетической энергии поступательного движения пылинки:

$$\bar{W}_\Pi = m_\Pi \langle v_\Pi^2 \rangle / 2, \quad (1)$$

и средней кинетической энергии поступательного движения молекулы азота:

$$\bar{W}_{N_2} = m_{N_2} \langle v_{N_2}^2 \rangle / 2, \quad (2)$$

где  $m_\Pi$ ,  $\sqrt{\langle v_\Pi^2 \rangle}$  – соответственно масса пылинки и средняя квадратичная скорость пылинки;  $m_{N_2}$ ,  $\sqrt{\langle v_{N_2}^2 \rangle}$  – масса одной молекулы азота и ее средняя квадратичная скорость.

Масса одной молекулы азота равна:

$$m_{N_2} = \mu_{N_2} / N_a, \quad (3)$$

где  $\mu_{N_2}$  – молярная масса азота;  $N_a$  – число Авогадро.

Из выражений (1), (2) и (3) найдем отношение

$$\sqrt{\langle v_{N_2}^2 \rangle} / \sqrt{\langle v_\Pi^2 \rangle} = \sqrt{m_\Pi N_a / \mu_{N_2}}. \quad (4)$$

Подставим в (4) числовые данные из условия задачи (значение числа Авогадро берется из таблицы [I] приложения), получим

$$\sqrt{\langle v_{N_2}^2 \rangle} / \sqrt{\langle v_\Pi^2 \rangle} = \sqrt{10^{-11} \cdot 6,02 \cdot 10^{-23} / 28 \cdot 10^{-3}} = 1,4 \cdot 10^7.$$

**Задача 5.2.** Обсерватория расположена на высоте 3250 м над уровнем моря. Найти давление воздуха на этой высоте. Температуру воздуха считать равной 15 °С. Молярную массу воздуха принять равной 0,029 кг/моль. Давление воздуха на уровне моря равно 750 мм.рт.ст.

### *Анализ и решение*

Закон убывания давления воздуха с высотой описывает барометрическая формула:

$$P(h) = P_0 \exp\left(-\frac{m_0 g h}{RT}\right). \quad (1)$$

Эта формула справедлива, если  $T = const$ . Для больших разностей высот это не соответствует действительности. Однако по условию задачи изменение  $T$  не учитывается. Поэтому находим  $P(h)$ , используя (1)

$$P(h) = 10^5 e^{-\frac{0,029 \cdot 9,8 \cdot 3250}{8,314(273+15)}} \cong 67,8 \text{ кПа}.$$

Следует заметить, что для численного расчета  $P(h)$  необходимо величину  $P_0$  перевести в [Па]. Напомним, как это сделать, если  $P_0$  – давление воздуха на уровне моря:

$$P_0 = \rho_{ртутти} \cdot g \cdot h \text{ [Па]},$$

где  $\rho_{ртутти} = 13,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$  – плотность ртути;  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ ;  $h = 0,75 \text{ м}$ . Тогда

$$P_0 = 13,5 \cdot 10^3 \cdot 9,8 \cdot 0,75 \approx 10^5 \text{ Па}.$$

**Задача 5.3.** Физик Перрен, наблюдая при помощи микроскопа изменение концентрации взвешенных частиц гуммигута<sup>1</sup> с изменением высоты и применив барометрическую формулу, экспериментально нашел значение числа Авогадро. В одном из своих опытов Перрен рассчитал, что при расстоянии между двумя слоями 100 мкм число взвешенных частиц гуммигута в одном слое вдвое больше, чем в другом. Температура гуммигута 20°C. Частицы гуммигута диаметром 0,3 мкм были взвешены в жидкости, плотность которой на 0,2 г/см<sup>3</sup> меньше плотности частиц. Найти по этим данным число Авогадро.

### *Анализ и решение*

Опыты Перрена (~1909 г.) имели важное значение для экспериментального обоснования молекулярно-кинетической теории. Один из его опытов описан в условии данной задачи. Он сводился к проверке барометрической формулы. Перрен предположил, что барометрическая формула применима к любым микроскопическим частицам, принимающим участие в тепловом движении, в частности, к частичкам гуммигута. Эти частицы формально можно рассматривать как частицы газа с большим молекулярным весом. Благодаря большому весу частиц их концентрация с высотой быстро падает. (Например, концентрация молекул воздуха уменьшается наполовину при подъеме на  $5 \cdot 10^3$  м, такое же изменение концентрации наших частиц наблюдается при вертикальных перемещениях приблизительно на  $10^{-4}$  м).

На рис. 5.6 показана микрография Перрена, снятая с эмульсии гуммигута в воде. Горизонтальные линии проведены так, что расстояние между ними 10 мкм. Распределение частиц по вертикали определялось с помощью микроскопа по схеме, изображенной на рис. 5.7. Микроскоп фокусируется на определенный слой жидкости, причем в фокусе оказываются частицы, лежащие в очень тонком слое (порядка 1 мкм). Перемещая объектив в вертикальном направлении, можно сосчитать число частиц гуммигута в слоях, лежащих на определенном расстоянии друг от друга.

Изменение концентрации частиц с высотой определяется выражением:

$$n = n_0 \cdot e^{-\frac{m_0 g h}{kT}}. \quad (1)$$

Отсюда отношение концентрации частиц с изменением высоты на  $\Delta h$

$$\frac{n_1}{n_2} = e^{\frac{m_0 g \Delta h}{kT}}, \quad (2)$$

где  $\Delta h$  – расстояние между двумя слоями с концентрациями  $n_1$  и  $n_2$  (рис. 5.7).

С учетом поправки на закон Архимеда вес частицы гуммигута в жидкости равен:

$$m_0 g - F_{Арх} = V \cdot \rho_г \cdot g - V \cdot \rho_{жс} \cdot g = V \cdot g \cdot (\rho_г - \rho_{жс}), \quad (3)$$

<sup>1</sup> Гуммигут – органическая краска.



где  $V$  – объем частицы гуммигута;  $\rho_z, \rho_{жс}$  - плотность гуммигута и жидкости соответственно.

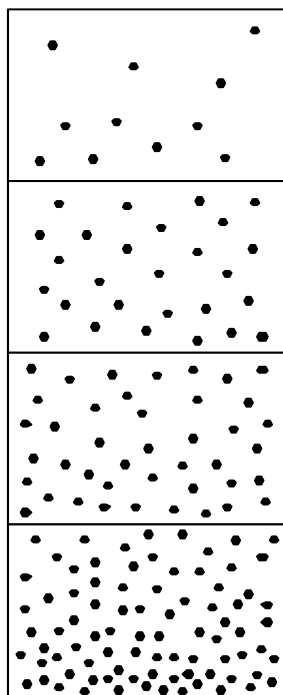


Рис. 5.6

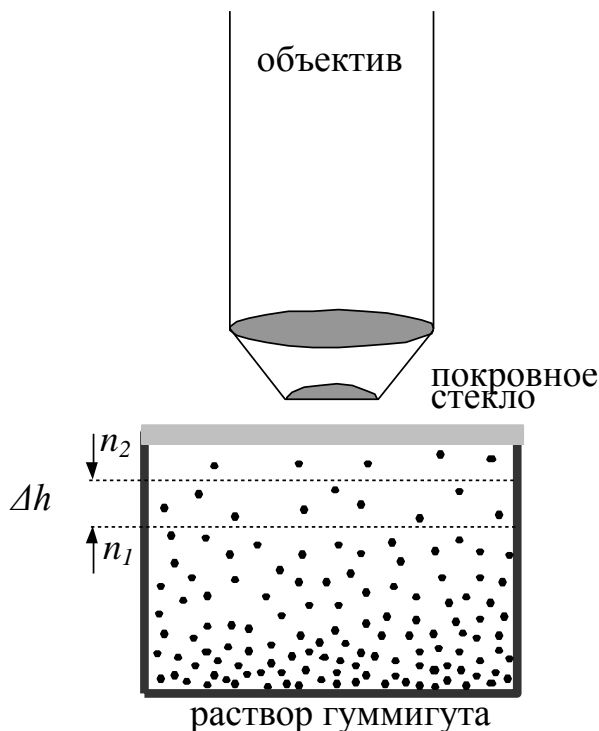


Рис. 5.7

Будем считать частицы гуммигута шариками, тогда их объем  $V$  равен:

$$V = 4\pi r^3 / 3 = \pi d^3 / 6. \quad (4)$$

Подставив (3) и (4) в (2) и учитывая, что число Авогадро  $N_a = R/k$ :

$$n_1 / n_2 = e^{\frac{Vg(\rho_z - \rho_{жс})\Delta h}{kT}} = e^{\frac{\pi d^3 g(\rho_z - \rho_{жс})N_a \Delta h}{6R(273+t^0)}}. \quad (5)$$

Принимая во внимание, что по условию задачи  $n_1/n_2 = 2$ , получим следующее выражение для расчета числа Авогадро:

$$N_a = \frac{6R(273+t^0) \cdot \ln 2}{\pi d^3 g(\rho_z - \rho_{жс})\Delta h}. \quad (6)$$

Подставив числовые данные в (6), вычислим значение числа Авогадро:

$$N_a = \frac{6 \cdot 8,31 \cdot 10^3 \cdot 293 \cdot 0,69}{3,14 \cdot (3 \cdot 10^{-7})^3 \cdot 9,8 \cdot 0,2 \cdot 10^3 \cdot 10^{-4}} = 6,07 \cdot 10^{26} \text{ кмоль}^{-1} = 6,07 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}.$$

В опыте Перрена впервые были проведены прямые определения числа Авогадро, полученное в них значение  $N_a$  удовлетворительно совпадает с ныне принятым табличным значением:

$$N_a = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}.$$

**Задача 5.4.** В сосуде находятся 14 г азота и 9 г водорода при температуре 10°C и давлении 1МПа. Найти: 1) молярную массу смеси; 2) объем сосуда.

**Анализ и решение**

Найдем молярную массу смеси  $\mu_{см}$ . По закону Дальтона давление смеси газов равно сумме их парциальных давлений, т.е. тех давлений, при которых находился бы каждый газ из смеси в отдельности, если бы он при данной температуре заполнял весь объем. В нашем случае имеем:

$$P_{см} = P_{N_2} + P_{H_2}. \quad (1)$$

Используя уравнение состояния идеального газа, можно найти  $P_{см}$ , а также  $P_{N_2}$  и  $P_{H_2}$ :

$$P_{см} = \frac{m_{см}}{\mu_{см}} \cdot \frac{RT}{V}, \quad (2)$$

$$P_{N_2} = \frac{m_{N_2}}{\mu_{N_2}} \cdot \frac{RT}{V}, \quad (3)$$

$$P_{H_2} = \frac{m_{H_2}}{\mu_{H_2}} \cdot \frac{RT}{V}. \quad (4)$$

Подставим (2), (3) и (4) в (1):

$$\frac{m_{см}}{\mu_{см}} \cdot \frac{RT}{V} = \frac{m_{N_2}}{\mu_{N_2}} \cdot \frac{RT}{V} + \frac{m_{H_2}}{\mu_{H_2}} \cdot \frac{RT}{V}. \quad (5)$$

Поделив правую и левую части выражения (5) на  $RT/V$ , получим:

$$\frac{m_{см}}{\mu_{см}} = \frac{m_{N_2}}{\mu_{N_2}} + \frac{m_{H_2}}{\mu_{H_2}}. \quad (6)$$

Из (6) имеем:

$$\mu_{см} = \frac{m_{см}}{\frac{m_{N_2}}{\mu_{N_2}} + \frac{m_{H_2}}{\mu_{H_2}}} = \frac{m_{N_2} + m_{H_2}}{\nu_{N_2} + \nu_{H_2}}, \quad (7)$$

где  $\nu_{N_2} = \frac{m_{N_2}}{\mu_{N_2}}$  и  $\nu_{H_2} = \frac{m_{H_2}}{\mu_{H_2}}$  - число молей азота и водорода в смеси.

Подставив числовые данные из условия задачи, определим молярную массу смеси:

$$\mu_{см} = 4,6 \text{ г/моль} = 4,6 \text{ кг/кмоль}.$$

Объем сосуда  $V$  вычислим, воспользовавшись выражением (2):

$$V = \frac{m_{см}}{\mu_{см}} \cdot \frac{RT}{\rho_{см}} = 11,7 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

**Задача 5.5.** 10 г кислорода находятся под давлением 3 атм. при температуре 10°C. После расширения вследствие нагревания при постоянном давлении кислород занял объем 10 л.

- Найти:
- 1) объем газа до расширения;
  - 2) температуру газа после расширения;
  - 3) плотность газа до расширения;
  - 4) плотность газа после расширения.

### *Анализ и решение*

Будем считать кислород в состоянии 1 (до расширения) и в состоянии 2 (после расширения) идеальным газом, тогда он подчиняется уравнению Клапейрона-Менделеева (5.1) и его состояния 1 и 2 определяются уравнениями:

$$P_1 V_1 = \frac{m_{O_2}}{\mu} RT_1, \quad P_2 V_2 = \frac{m_{O_2}}{\mu} RT_2. \quad (1)$$

Так как по условию задачи  $P_1 = P_2 = P$ , т.е. процесс расширения кислорода изобарический, то из этих уравнений можно найти искомые величины:

$$V_1 = \frac{m_{O_2}}{\mu} \frac{RT_1}{P} = \frac{10^{-2} \cdot 8,31 \cdot 10^3 \cdot 283}{32 \cdot 10^3 \cdot 10^5} = 2,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3,$$

$$T_2 = \frac{PV_2 \mu}{m_{O_2} R} = 1170 \text{ К},$$

$$t_2 = 1170 - 273 = 897^\circ \text{С}.$$

Используя уравнение (1.1) легко найти соотношение для плотности газа:

$$\rho = m_{O_2} / V = P\mu / RT. \quad (2)$$

Тогда плотности газа в состояниях 1 и 2 равны:

$$\rho_1 = P\mu / RT_1 = 4,14 \text{ кг/м}^3; \quad \rho_2 = P\mu / RT_2 = 1 \text{ кг/м}^3$$

## § 3 Основы термодинамики

### Формы обмена энергией в термодинамике

Система микроскопических частиц, свойства которой описываются уравнением состояния (например, уравнением Клапейрона-Менделеева для идеального газа), называется термодинамической системой.

При взаимодействии термодинамических систем их состояния могут изменяться. В зависимости от формы передачи энергии взаимодействия делятся на тепловые и адиабатические.

**Тепловым взаимодействием** называется такое взаимодействие, когда обмен энергией между системами происходит благодаря теплопередаче, но без совершения работы. Величина энергии, которой обмениваются при тепловом взаимодействии, называется количеством теплоты.

**Адиабатическим взаимодействием** называют обмен энергией между системами благодаря совершению работы. Макроскопическая работа совершается при изменении параметров состояния и не связана с явлением теплопередачи.

### Термодинамическое равновесие

Равновесным называется такое состояние системы, при котором все параметры системы имеют определенные значения, остающиеся при неизменных внешних условиях постоянными сколько угодно времени. Равновесное состояние можно изобразить на координатной плоскости  $PV$  точкой. На рис. 5.8 показаны два равновесных состояния на плоскости  $PV$  (точки 1 и 2).

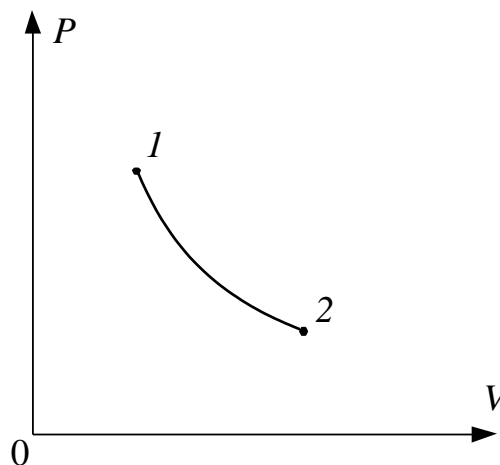


Рис. 5.8

Процесс перехода из одного равновесного состояния в другое связан с нарушением равновесия. Однако если переход производить бесконечно медленно, то можно добиться того, чтобы промежуточные состояния тоже можно было считать равновесными.

Равновесный процесс может быть произведен в обратном направлении, причем система будет проходить через те же состояния, что и в прямом процессе. Поэтому равновесные процессы называются обратимыми. Обратимый процесс на координатной плоскости изображается соответствующей кривой (рис. 5.8).

Внутренняя энергия системы может быть рассмотрена на основе представлений молекулярно-кинетической теории. Внутренняя энергия идеального газа определяется суммой средних кинетических энергий составляющих его молекул. Для одного моля идеального газа:

$$U = N_a \frac{m_0 \langle v^2 \rangle}{2} = \frac{3}{2} N_a K T = \frac{3}{2} R T, \quad (5.23)$$

где  $N_a$  – число Авогадро.

Из (5.23) видно, что  $U$  зависит от  $T$  – параметра состояния. Так как в реальном газе нельзя пренебречь потенциальной энергией взаимодействия молекул, то и  $U = f(V, T)$ . Внутренняя энергия – функция состояния системы.

## Первое начало термодинамики

Первое начало термодинамики – это закон сохранения энергии, записанный для тепловых процессов.

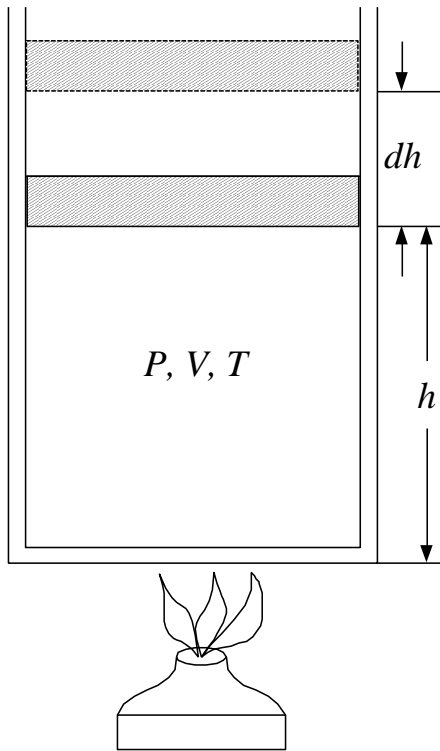


Рис. 5.9

Целый ряд термодинамических проблем можно решить, рассматривая очень простой механизм: цилиндр с поршнем, под поршнем газ, параметры состояния его заданы соответствующими значениями  $P$ ,  $V$  и  $T$ . Поршень перемещается в полости цилиндра без трения.

Если находившийся в равновесии газ подогреть, то поршень будет подниматься, поскольку давление возрастет на  $dP$ . При этом вследствие нагрева газа меняется его внутренняя энергия  $dU$ . Кроме того, перемещая поршень на высоту  $dh$ , газ совершит работу  $dA$  против внешних сил. На изменение и производство работы  $dA$  затратится переданная газу тепловая энергия  $dQ$ :

$$dQ = dU + dA. \quad (5.24)$$

Это уравнение, выражающее закон сохранения энергии, называется первым

началом термодинамики.

Принято считать, что  $dQ > 0$ , если газ получает тепло,  $dQ < 0$ , если отдает;  $dA > 0$ , если газ совершает работу против внешних сил;  $dA < 0$ , если над газом совершается работа.

Подсчитаем работу при подъеме поршня на высоту  $dh$ . Как известно, работа равна скалярному произведению силы на перемещение:

$$dA = (P + dP) S dh = S P dh + dP dh S,$$

где  $S$  – площадь поршня.

Вторым слагаемым можно пренебречь, поскольку оно второго порядка малости. Поэтому

$$dA = P dV. \quad (5.25)$$

## Теплоемкость идеального газа

Теплоемкость тела характеризуется количеством теплоты, которую нужно сообщить телу, чтобы повысить его температуру на один Кельвин:

$$C = \frac{dQ}{dT}. \quad (5.26)$$

Теплоемкость моля вещества называется молярной теплоемкостью, обозначается  $C$  и имеет размерность [Дж/(кмоль · К)]. Теплоемкость единицы массы вещества обозначается  $c$  и имеет размерность [Дж/(кг · К)].

Мы будем рассматривать только молярную теплоемкость  $C$ .

В зависимости от того, какой процесс определяет переход из одного стационарного состояния в другое, при сообщении газу извне некоторого количества тепла  $dQ$ , теплоемкость может иметь различные значения.

Рассмотрим значения  $C$  при постоянном объеме ( $C_V$ ) и постоянном давлении ( $C_P$ ).

### I. Теплоемкость при постоянном объеме

Так как  $dV = 0$ , то газ работы не совершает ( $dA = 0$ ), поэтому сообщенное тепло идет на увеличение внутренней энергии газа:

$$dQ = dU.$$

Поскольку по определению

$$dQ = C_V dT, \quad (5.27)$$

то изменение внутренней энергии идеального газа равно:

$$dU = \frac{3}{2} R \cdot dT = C_V \cdot dT,$$

Теплоемкость идеального газа при постоянном объеме:

$$C_V = \frac{3}{2} R. \quad (5.28)$$

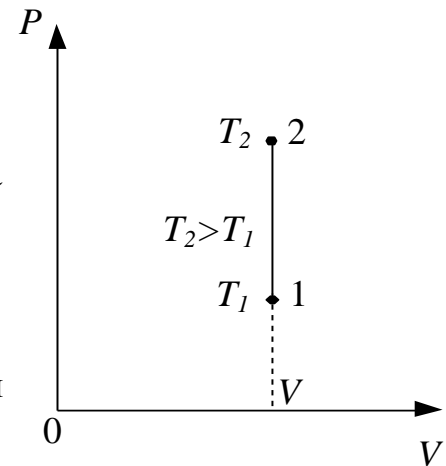


Рис. 5.10

### II. Теплоемкость при постоянном давлении

При передаче газу некоторого количества тепла  $dQ$  будет расти его внутренняя энергия:

$$dU = C_V dT,$$

при этом будет совершаться работа против внешних сил:

$$dA = P dV.$$

Следовательно,

$$dQ = C_V dT + P dV.$$

Поскольку  $P dV = R dT$  (см. уравнение Клапейрона-Менделеева), то

$dQ = C_P \cdot dT = C_V dT + R dT = (C_V + R)dT$ ,  
откуда

$$C_P = C_V + R. \quad (5.30)$$

На (5.30) видно, что  $C_P$  и  $C_V$  отличаются друг от друга на постоянную величину и что  $C_P > C_V$ . Прирост температуры при изобарном нагревании меньше, чем при изохорном, так как часть энергии в первом случае идет на совершение работы против внешних сил.

В выражении (5.28) число 3 означает, что молекула одноатомного газа подобна материальной точке и имеет три степени свободы, т.е. ее положение и движение в пространстве можно задать тремя независимыми координатами. В более общем виде выражения (5.28) и (5.30) должны быть записаны в следующем образе:

$$C_V = \frac{i}{2} R, \quad C_P = \frac{i+2}{2} R, \quad (5.31)$$

где  $i$  – число степеней свободы молекулы газа.

Энергия, приходящаяся на одну степень свободы, равна  $\frac{1}{2} kT$ .

Если молекула газа состоит из двух и более атомов, то она может участвовать как в поступательном, так и во вращательном движении вокруг трех взаимно перпендикулярных осей. В этом случае число степеней свободы увеличивается и составляет 5 и 6, соответственно.

В частном случае двухатомной молекулы идеального газа, когда размерам атомов, составляющих молекулу, можно пренебречь, следует учитывать только 2 степени свободы для вращательного движения, т.е. такая молекула имеет всего 5 степеней свободы.

### Адиабатный процесс

В адиабатном процессе газу не сообщается тепло извне ( $dQ = 0$ ), но другие взаимодействия с внешним миром возможны (можно, например, увеличить или уменьшить внешнее давление), поэтому газ нельзя считать замкнутой системой.

Применительно к адиабатному процессу первое начало термодинамики можно записать в виде:

$$dU + dA = 0 \quad \text{или} \quad dA = -dU. \quad (5.32)$$

Иначе говоря, работа может совершаться только за счет изменения внутренней энергии газа. Если  $dA > 0$ , то внутренняя энергия будет уменьшаться, т.е. газ охлаждается.

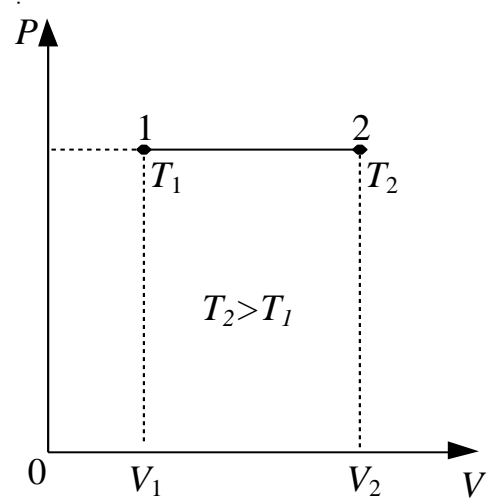


Рис. 5.11

Рассмотрим адиабатный процесс. Для этого воспользуемся уравнением состояния Клапейрона-Менделеева и первым началом термодинамики. Рассмотрение будем вести для одного моля вещества:

$$dU = C_v dT = -dA = -PdV = -\frac{RT}{V} dV. \quad (5.33)$$

Из (5.33) получим:

$$C_v dT = -\frac{RT}{V} dV,$$

или, разделив переменные:

$$\frac{dT}{T} = -\frac{R}{C_v} \cdot \frac{dV}{V}. \quad (5.34)$$

Введем коэффициент Пуассона  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ , и тогда (5.34) преобразуется к виду:

$$\frac{dT}{T} = -(\gamma - 1) \frac{dV}{V}. \quad (5.35)$$

Проинтегрировав (5.35), получим:

$$TV^{\gamma-1} = const. \quad (5.36)$$

Можно получить иное выражение для адиабатного процесса, учитывая, что  $T = PV/R$ :

$$P V^\gamma = const. \quad (5.37)$$

Выражения (5.36) и (5.37) называются соотношениями Пуассона для адиабатного процесса.

Рисунок 5.12 иллюстрирует адиабатный переход из состояния 1 в состояние 2. Для примера на рис. 5.12 представлена изотерма 1-3.

Адиабатные процессы с достаточной степенью достоверности реализуются в природе<sup>2</sup>. Это, как правило, быстро протекающие процессы. Теплообмена с внешней средой практически не происходит, поскольку коэффициент теплопроводности газа низок.

Коэффициент Пуассона не одинаков для одноатомных и двухатомных газов:  $\gamma = 1,66$  и  $\gamma = 1,4$  соответственно.

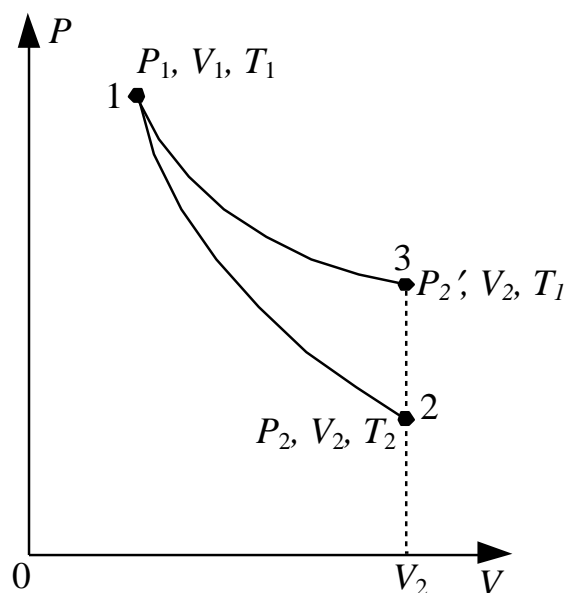


Рис. 5.12

<sup>2</sup> Например, процесс распространения звука в воздухе.



## Цикл Карно и его КПД

Для построения машины, преобразующей тепловую энергию в механическую, необходимо устройство, обычно работающее циклически. Любая термодинамическая машина содержит 3 принципиальные части:

- 1) источник энергии – нагреватель,
- 2) устройство для отвода тепла и возвращения машины в исходное состояние – холодильник,
- 3) любое физическое тело, которое служит посредником, обеспечивающим процесс преобразования тепловой энергии в механическую, называется рабочим телом.

Рассмотрим такой процесс графически (рис. 5.13).

Для перехода газа из состояния 1 в 2 вдоль кривой (1 a 2) необходимо сообщение тепла  $Q_1$ . Произведенная при этом работа численно равна площади криволинейной трапеции (1a22'1'1). Для того чтобы результирующая за цикл работа не была равна нулю, газ надо вернуть в исходное состояние по кривой (2 b 1), для чего часть тепла ( $Q_2$ ) должна уйти в холодильник. Площадь дважды заштрихованной области будет соответствовать работе, произведенной над газом в этом процессе.

Полезная работа определяется площадью внутри кривой (1 a 2 b 1)  $A = Q_1 - Q_2$ , при этом КПД цикла

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}. \quad (5.38)$$

Выражение (5.38) справедливо для любого процесса, но из него не следует никакой информации о нагревателе, холодильнике и способе передачи тепла. Для понимания этих вопросов Карно в 1824 г. рассмотрел идеальную тепловую машину, работающую по замкнутому циклу. Цикл Карно состоит из двух адиабат и двух изотерм и представлен графически на рис. 5.14. Опишем его, начиная от состояния 1 и считая, что количество газа равно одному молю.

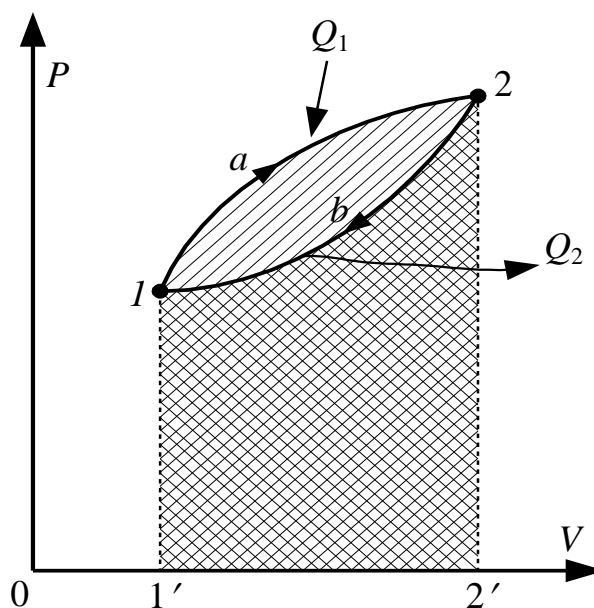


Рис. 5.13

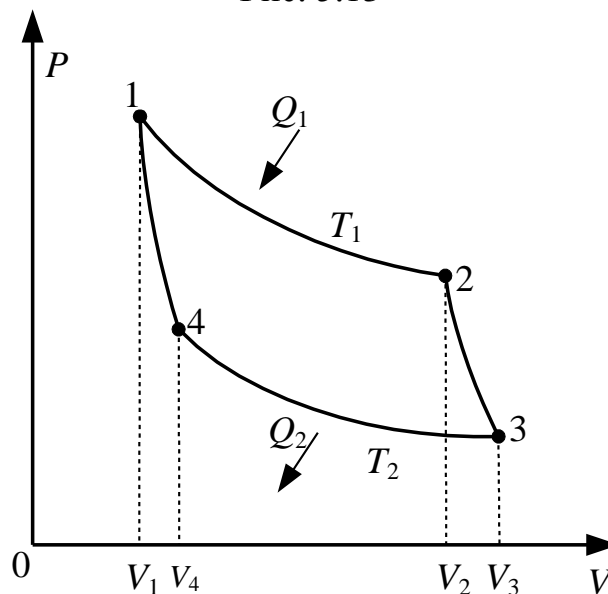


Рис. 5.14

От точки 1 до точки 2 газ изотермически расширяется, получая от нагревателя, который, как и газ, находится при температуре  $T_1$ , количество тепла  $Q_1$ . При этом над газом совершается работа  $dQ = dA$ , так как при изотермическом процессе изменения внутренней энергии не происходит ( $dU = C_V dT = 0$ );

$$Q_1 = \int dA = \int_{V_1}^{V_2} P dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{RT}{V} dV = RT_1 \ell n \frac{V_2}{V_1}. \quad (5.39)$$

От точки 2 до точки 3 газ испытывает адиабатическое расширение, производимая газом работа равна убыли его внутренней энергии, и, следовательно, температура газа уменьшается до значения  $T_2$ .

Далее, между точками 3 и 4 происходит изотермическое сжатие, при этом избыточная тепловая энергия  $Q_2$  передается холодильнику:

$$Q_2 = RT_2 \ell n \frac{V_3}{V_4}. \quad (5.40)$$

Между точками 4 и 1 газ сжимается адиабатически.

Исходя из того, что кривые 2-3 и 4-1 – адиабаты, запишем (см. (5.36)):

$$\begin{aligned} T_1 V_2^{\gamma-1} &= T_2 V_3^{\gamma-1}, \\ T_1 V_1^{\gamma-1} &= T_2 V_4^{\gamma-1}, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}. \quad (5.41)$$

Если в выражение (5.38) подставить значения  $Q$  из (5.39) и (5.40) и учесть соотношение (5.41), можно получить КПД цикла Карно:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad (5.42)$$

Из (5.42) следует, что КПД любой тепловой машины меньше 1, но тем выше, чем больше разница между  $T_1$  и  $T_2$ .

КПД реальных тепловых машин всегда меньше, чем в цикле Карно.

### Примеры решения задач

**Задача № 5.6.** Найти удельную теплоемкость кислорода:

1) при  $V = const$ , 2) при  $P = const$ . Определить отношение  $C_p / C_V$ .

#### Анализ и решение

Для идеальных газов величины молярной теплоемкости при постоянном давлении  $C_p$  молярной теплоемкости при постоянном объеме  $C_V$  можно рассчитать следующим образом:

$$C_p = \frac{i+2}{2}R, \quad C_v = \frac{i}{2}R, \quad (1)$$

где  $i$  – число степеней свободы молекулы газа;  $R$  – универсальная газовая постоянная.

Молекула кислорода состоит из двух атомов (рис. 5.15).

Считая молекулу кислорода  $O_2$  жесткой, т.е. расстояние между ее атомами неизменным, получим, что она имеет в классическом приближении 3 степени свободы поступательного движения центра масс и 2 степени свободы вращательного движения около осей  $X$  и  $Z$ . Вращение вокруг оси  $Y$  происходит только при высоких  $T$ . Тогда согласно (1) получим:

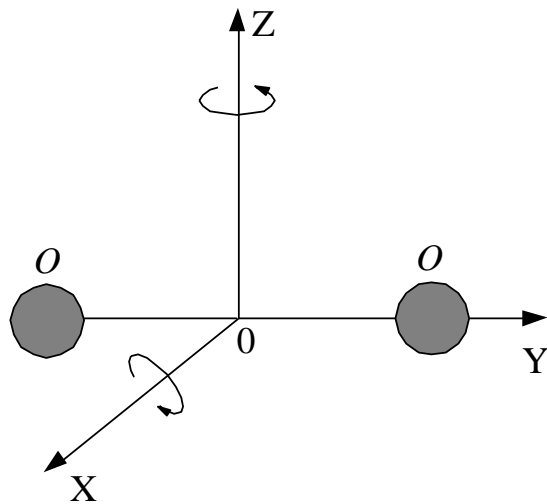


Рис. 5.15

$$C_p = \frac{7}{2}R, \quad C_v = \frac{5}{2}R. \quad (2)$$

Удельная теплоемкость вещества равна  $C = C/\mu$ , где  $\mu$  – молярная масса. Тогда для кислорода получим:

$$C_p = \frac{7}{2} \cdot \frac{R}{\mu} = 910 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}, \quad C_v = \frac{5}{2} \cdot \frac{R}{\mu} = 650 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

Найдем отношение  $C_p/C_v$  для кислорода:

$$C_p/C_v = (i+2)/i = 1,4.$$

Следует отметить, что проведенный нами расчет теплоемкости кислорода был основан на предположении, что кислород является идеальным газом. Такое предположение является допустимым при давлении и температуре газа, близким соответственно атмосферному и комнатной. При этих условиях свойства большинства реальных газов практически не отличаются от идеальных.

**Задача 5.7.** Воздух находится в тонкостенном сосуде и при помощи крана может соединяться с атмосферой (рис. 5.16). Избыточное, по сравнению с атмосферным, давление воздуха в сосуде измеряется  $U$  – образным манометром, наполненным водой. Вначале воздух в сосуде находится при комнатной температуре и некотором избыточном давлении, измеряемом разностью столбов жидкости в манометре  $\Delta h_1 = 23$  см. Затем воздух в сосуде соединяют с атмосферой (при этом его давление падает до атмосферного), и кран быстро закрывают. Через некоторое время давление в закрытом сосуде вновь

становится больше атмосферного на величину, измеряемую разностью столбов жидкости в манометре  $\Delta h_2 = 3$  см. Найти  $\gamma$  для воздуха.

### *Анализ и решение*

Для идеальных газов теплоемкости  $C_P$  и  $C_V$  можно рассчитать, исходя из представлений классической молекулярно-кинетической теории (задача 5.6). Обычный воздух, которым мы дышим, при нормальных условиях (комнатной температуре и атмосферном давлении) с достаточной степенью точности можно считать идеальным газом. Однако воздух – это смесь различных газов (главным образом двухатомных газов – кислорода  $O_2$  и азота  $N_2$ , а также трехатомного углекислого газа  $CO_2$ ), поэтому расчет  $C_P$ ,  $C_V$  по формулам (5.31) сложен, так как требует знания точного состава основных компонентов воздуха.

Величины теплоемкости воздуха  $C_P$  и  $C_V$  играют важную роль в термодинамике, что и привело к развитию различных экспериментальных способов их нахождения. В данной задаче описан один из самых простых методов определения  $\gamma = C_P/C_V$  для воздуха – метод адиабатического расширения (метод Клемана и Дезорма). Он основан на том факте, что величина  $\gamma$  входит в уравнение Пуассона (см. выражения (5.36) и (5.37)), описывающие адиабатный процесс для идеальных газов.

На рис. 5.16 показана схема эксперимента, описанного в задаче.

Экспериментальный метод определения  $\gamma$  заключается в следующем. Если накачать в закрытый сосуд немного воздуха, то через некоторое время вследствие теплообмена через стенки сосуда температура воздуха в сосуде станет равной комнатной.  $T_{комн.}$ , а давление будет несколько выше атмосферного (первое состояние газа), что фиксируется манометром

$$P_1 = P_{атм} + \Delta P_1, \quad (1)$$

где  $\Delta P_1$  – избыточное давление, пропорциональное величине разности уровней жидкости в манометре  $\Delta h_1$ :

$$\Delta P_1 = \rho_g \cdot g \Delta h_1.$$

Если затем открыть кран и закрыть его в тот момент, когда давление в сосуде станет  $P_{атм}$  (причем это делают очень быстро, чтобы теплообменом через стенки сосуда можно было пренебречь), то произойдет адиабатическое расширение оставшейся части газа в сосуде. Это и есть второе состояние газа: давление будет равно  $P_{атм}$ , а температура  $T_2$  вследствие адиабатического расширения будет ниже комнатной. В дальнейшем температура воздуха вновь станет равной  $T_{комн.}$ , однако давление повысится до значения  $P_2$ :

$$P_2 = P_{атм} + \Delta P_2, \quad (2)$$

где  $\Delta P_2$  – так же, как и где  $\Delta P_1$ , пропорционально  $\Delta h_2$  (третье состояние):  $\Delta P_2 = \rho_g \cdot g \Delta h_2$ .

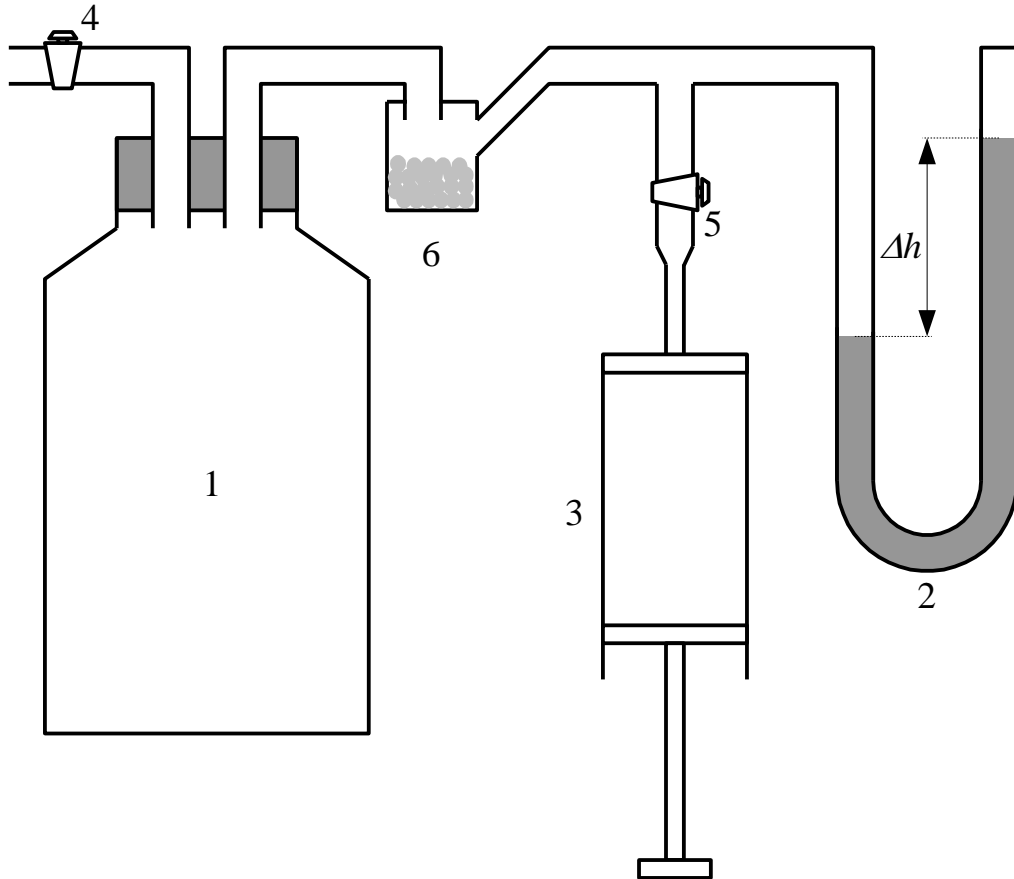


Рис. 5.16: 1 – тонкостенный сосуд, 2 – манометр, 3 – насос, 4, 5 – изолирующие краны, 6 – объем, наполненный поглощающим воду веществом.

Рассмотрим аналитически переход газа из состояния 1 в состояние 2, а затем в состояние 3.

Переход из состояния 1 ( $P_1, T_{\text{комн}}$ ) в 2 ( $P_{\text{атм}}, T_2$ ) происходит адиабатически и подчиняется уравнению Пуассона, которое в этом случае удобно записать в форме:

$$\frac{P_1^{\gamma-1}}{T_{\text{комн}}^{\gamma}} = \frac{P_{\text{атм}}^{\gamma-1}}{T_2^{\gamma}}. \quad (3)$$

Дальнейший переход из состояния 2 ( $P_{\text{атм}}, T_2$ ) в состояние 3 ( $P_2, T_{\text{комн}}$ ) происходит изохорически ( $V = \text{const}$ ) и подчиняется уравнению Шарля (см. выражение 1):

$$\frac{P_{\text{атм}}}{T_2} = \frac{P_2}{T_{\text{комн}}}. \quad (4)$$

Исключая из уравнений (3) и (4) температуру (сначала возведем (4) в степень  $\gamma$ , а затем поделим (3) на (4)), найдем

$$\left(\frac{P_2}{P_{атм}}\right)^\gamma = \left(\frac{P_1}{P_{атм}}\right)^{\gamma-1}. \quad (5)$$

Подставим выражения (1) и (2) в (5):

$$\left(\frac{P_{атм} + \Delta P_2}{P_{атм}}\right)^\gamma = \left(\frac{P_{атм} + \Delta P_1}{P_{атм}}\right)^{\gamma-1}.$$

Получим, что

$$\left(1 + \frac{\Delta P_2}{P_{атм}}\right)^\gamma = \left(1 + \frac{\Delta P_1}{P_{атм}}\right)^{\gamma-1}. \quad (6)$$

В условиях опыта величины  $\frac{\Delta P_2}{P_{атм}}$  и  $\frac{\Delta P_1}{P_{атм}}$  значительно меньше единицы (поэтому для измерения  $\Delta P_1$  и  $\Delta P_2$  используют водяной манометр, обладающий большей чувствительностью, чем ртутный):  $\Delta P = \rho_{жидк} \cdot g \cdot \Delta h$ , так как  $\rho_{воды} \ll \rho_{рт}$ . Поэтому с достаточной степенью точности можно записать:

$$1 + \gamma \frac{\Delta P_2}{P_{атм}} = 1 + (\gamma - 1) \frac{\Delta P_1}{P_{атм}}. \quad (7)$$

После несложных алгебраических преобразований нетрудно получить расчетную формулу для  $\gamma$ :

$$\gamma = \frac{\Delta P_1}{\Delta P_1 - \Delta P_2} = \frac{\Delta h_1}{\Delta h_1 - \Delta h_2}. \quad (8)$$

Произведем расчет  $\gamma$  по формуле (8), учитывая данные из условия задачи:

$$\gamma = \frac{23}{23-3} \cong 1,2.$$

Следует отметить, что описываемый в задаче метод определения  $\gamma$  для воздуха обладает значительной погрешностью. Предлагаем читателю самостоятельно объяснить, чем обусловлена погрешность при измерении  $\gamma$  воздуха методом Клемана и Дезорма, сравнив полученный результат с табличным значением.

**Задача 5.8.** Дистиллированная вода, находящаяся при нормальных условиях протекает по трубке со спиралью, которая нагревается электрическим током. За 225 с её температура возрастает на 4 К, если в первом случае масса протекшей воды 0,02 кг, сила тока 0,1 А и напряжение 10 В, и во втором случае

масса протекшей воды 0,06 кг, сила тока 0,2 А и напряжение 20 В.

Найти удельную теплоемкость воды.

### *Анализ и решение*

Как известно, удельная теплоемкость вещества измеряется количеством теплоты, подводимой к единице массы вещества для изменения её температуры на один кельвин, т.е.

$$c = \frac{dQ}{m dT}, \quad (1)$$

где  $c$  – удельная теплоемкость вещества;

$dQ$  – количество теплоты;

$m$  – масса вещества;

$dT$  – изменение температуры вещества.

В действительности мы часто имеем дело с конечным изменением температуры, поэтому вводится понятие средней теплоемкости вещества  $c_{cp}$  для данного интервала температур:

$$c_{cp} = \frac{\Delta Q}{m \Delta T}, \quad (2)$$

где  $\Delta Q$  и  $\Delta T$  – конечные значения количества теплоты и изменения температуры соответственно.

В задаче описан один из экспериментальных методов определения  $c_{cp}$  при постоянном давлении. Следует отметить, что для жидкостей (в частности, для воды) теплоемкости при постоянном давлении  $C_p$  и постоянном объеме  $C_v$  отличаются друг от друга очень незначительно (на доли процента).

В этом методе нагревание воды осуществляется электрическим способом, что позволяет просто оценить количество теплоты, передаваемое воде проходящим через спираль электрическим током. Ток совершает работу, идущую на увеличение внутренней энергии спирали за время  $\tau$ . Так как спираль погружена в воду, то происходит передача энергии от спирали к воде путем теплообмена (без совершения работы), что приводит к выравниванию температуры. При установившемся режиме за время  $\tau$  спираль отдает теплоту:

$$Q = IU\tau, \quad (3)$$

где  $I$  и  $U$  – значения электрического тока и напряжения, соответственно.

Так как часть теплоты  $Q$  передается воде, а другая рассеивается в процессе теплообмена с окружающей средой, то можно записать уравнение теплового баланса, учитывая тепловые потери.

Согласно условию задачи в первом случае имеем:

$$I_1 U_1 \tau = c_{cp} m_1 \Delta T + q_1 , \quad (4)$$

во втором аналогично:

$$I_2 U_2 \tau = c_{cp} m_2 \Delta T + q_2 . \quad (5)$$

Будем считать тепловые потери  $q_1$  и  $q_2$  одинаковыми. Тогда, вычитая из соотношения (4) соотношение (5), получим выражение для удельной теплоемкости дистиллированной воды (индекс «ср» опустим):

$$c = \frac{(I_1 U_1 - I_2 U_2) \tau}{(m_1 - m_2) \Delta T} . \quad (6)$$

Подставив числовые данные задачи, произведем расчет:

$$c \approx 4,2 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} .$$

Полученная величина удельной теплоемкости воды при нормальных условиях удовлетворительно совпадает с табличным значением.

**Задача 5.9.** 6,5 г водорода, находящегося при температуре  $27^{\circ} \text{C}$ , расширяется вдвое при  $p = \text{const}$  за счет притока тепла извне.

- Найти: 1) работу расширения;  
2) изменение внутренней энергии газа;  
3) количество теплоты, сообщенное газу.

#### *Анализ и решение*

Работа, совершаемая газом при расширении при переходе из состояния 1 в 2, определяется выражением:

$$A = \int_1^2 P \cdot dV . \quad (1)$$

Так как по условию задачи процесс расширения газа происходил при постоянном давлении (изобарический процесс), то можно выражение (1) записать в виде:

$$A = P (V_2 - V_1) , \quad (2)$$

где  $V_2$  и  $V_1$  – объем газа в состояниях 1 и 2 соответственно.

Согласно закону Гей-Люссака изменение объема газа сопровождалось изменением его температуры:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} . \quad (3)$$



Так как из условия задачи имеем, что  $\frac{V_2}{V_1} = 2$ , то из (3) получаем:  $T_2 = 2T_1$ .

Запишем уравнения Клапейрона-Менделеева для первого и второго состояния газа:

$$PV_1 = \frac{m}{\mu} RT_1, \quad (4)$$

$$PV_2 = \frac{m}{\mu} RT_2. \quad (5)$$

Вычитая из (5) (4) и используя соотношение между  $T_1$  и  $T_2$ , получим:

$$P(V_2 - V_1) = \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1) = \frac{m}{\mu} RT_1. \quad (6)$$

Подставляя (6) в (2), окончательно запишем:

$$A = \frac{m}{\mu} RT_1 = 8,1 \text{ кДж}.$$

Изменение внутренней энергии газа  $\Delta U$  равно:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{m}{\mu} C_v \Delta T, \quad (7)$$

где  $C_v$  – молярная теплоемкость газа при постоянном объеме,

$$\Delta T = T_2 - T_1 = 2T_1 - T_1 = T_1.$$

Считая водород при заданных условиях идеальным двухатомным газом, найдем  $C_v$ :

$$C_v = \frac{5}{2} R. \quad (8)$$

Тогда, подставив (8) в (7), получим:

$$\Delta U = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{5}{2} RT_1 = 20,2 \text{ кДж}.$$

Воспользуемся законом сохранения энергии для тепловых процессов – первым началом термодинамики:

$$Q = \Delta U + A. \quad (9)$$

Вычислим  $Q$ :

$$Q = \Delta U + A \approx 28 \text{ кДж}.$$

**Задача 5.10.** Идеальная тепловая машина, работающая по циклу Карно, совершает за один цикл работу 73,5 кДж. Температура нагревателя 100<sup>0</sup>С, температура холодильника 0<sup>0</sup>С.

- Найти: 1) коэффициент полезного действия машины;  
2) количество теплоты, получаемой машиной за один цикл от нагревателя;  
3) количество теплоты, отдаваемое за один цикл холодильнику.

**Анализ и решение**

Известно, что коэффициент полезного действия  $\eta$  идеальной тепловой машины, работающей по циклу Карно, можно рассчитать по формуле:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \quad (1)$$

где  $T_1$  и  $T_2$  – температура нагревателя и холодильника соответственно.

Используя данные из условия задачи, вычислим значение  $\eta$ :

$$\eta = \frac{(273+100)-273}{273+100} = \frac{100}{373} = 0,268 = 26,8\%$$

Согласно определению,  $\eta$  для любой тепловой машины равно:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}, \quad (2)$$

где  $Q_1$  – количество теплоты, полученное машиной от нагревателя за один цикл;

$Q_2$  – количество теплоты, отдаваемое машиной за один цикл холодильнику.

Тогда  $Q_1 - Q_2$  есть полезная работа  $A_{пол}$ , совершаемая тепловой машиной за один цикл, а следовательно, выражение для  $\eta$  можно переписать в виде:

$$\eta = A_{пол} / Q_1. \quad (3)$$

Из (3) найдем  $Q_1$ :

$$Q_1 = A_{пол} / \eta = 73,5 / 0,268 = 274 \text{ кДж.}$$

Тепло  $Q_2$ , отданное машиной за один цикл холодильнику, равно:

$$Q_2 = Q_1 - A_{пол} = 200 \text{ кДж.}$$

## ТЕМА 6

### ЭЛЕКТРОСТАТИКА

#### Два вида электрических зарядов. Дискретность заряда и закон сохранения заряда

Фундаментальным свойством электрического заряда является существование его в двух видах: положительном и отрицательном. Выбор этих названий был исторической случайностью. Важно, что все заряженные частицы делятся на положительные и отрицательные, причем одноименные заряды отталкиваются, а разноименные притягиваются.

В природе электрические заряды состоят из дискретных зарядов, при этом минимальный отрицательный электрический заряд равен заряду  $e$  электрона:

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл.}$$

Точно таким же, но положительным зарядом обладает другая стабильная частица – протон. Минимальная порция электрического заряда получила название элементарного заряда. В заряженном теле всегда содержится громадное число элементарных зарядов.

**Закон сохранения электрического заряда** можно сформулировать следующим образом:

В изолированной системе полный электрический заряд, т.е. алгебраическая сумма положительных и отрицательных зарядов, остается неизменным.

Электрические явления в дальнейшем будут рассматриваться для макроскопических тел, содержащих огромное число элементарных зарядов. Для описания этих явлений будут использоваться две модели:

- точечного заряда,
- непрерывного распределения заряда по объему, плоскости, линии (проводу).

**Точечный заряд** – заряженное тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь. Очевидно, что понятие точечного заряда подобно понятию материальной точки в механике.

**Закон Кулона** определяет величину силы  $F$ , с которой взаимодействуют два точечных заряда  $q_1$  и  $q_2$ , находящиеся на расстоянии  $r$  друг от друга:

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

Коэффициент  $k$  зависит от выбора системы единиц и в СИ для вакуума:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2},$$

где  $\epsilon_0$  – электрическая постоянная вакуума,  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$ .

Если же заряды  $q_1$  и  $q_2$  поместить в какую-либо среду, то сила взаимодействия между ними уменьшится:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2},$$

где  $\epsilon$  – относительная диэлектрическая проницаемость данной среды по отношению к вакууму, для которого  $\epsilon = 1$ .

В векторной записи закон Кулона имеет вид:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}. \quad (6.1)$$

Сила электростатического взаимодействия между двумя точечными зарядами направлена вдоль радиус-вектора, соединяющего эти заряды. Закон Кулона справедлив и для сферически симметричных заряженных тел, только в этом случае  $r$  – расстояние между центрами сфер. Рисунок 6.1 иллюстрирует

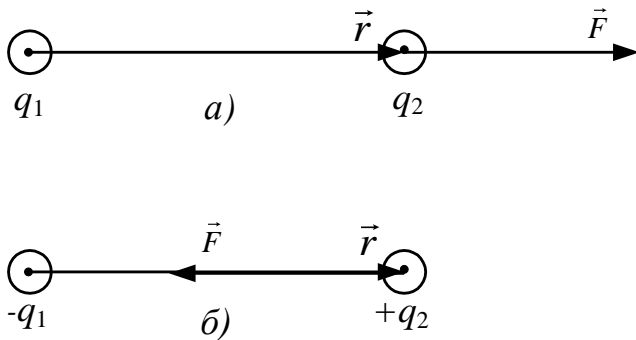


Рис. 6.1

действие заряда  $q_1$  на заряд  $q_2$  и взаимное направление  $\vec{F}$  и  $\vec{r}$  для одноименных (рис. 6.1.а) и разноименных (рис. 6.1.б) зарядов.

Если заряды одного и того же знака, то  $\vec{F} \uparrow \uparrow \vec{r}$ , т.е. имеет место отталкивание. Если заряды разноименные, то  $\vec{F} \uparrow \downarrow \vec{r}$  – притяжение.

## Напряженность электрического поля. Поле точечного заряда.

### Принцип суперпозиции

Между зарядами, расположенными на расстоянии  $r$  друг от друга, существует электростатическое взаимодействие. Поэтому можно говорить о силовом поле, созданным одним из зарядов, и о воздействии этого поля на другой заряд.

Силовой характеристикой электростатического поля в данной точке является вектор напряженности  $\vec{E}$ . Напряженность определяется величиной силы, действующей на положительный заряд  $q$ , помещенный в эту точку пространства:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}. \quad (6.2)$$

Напряженность поля точечного заряда  $q_1$  может быть получена из закона Кулона (6.1):

$$\vec{E}_1 = \frac{\vec{F}}{q_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \cdot \frac{q_1}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}. \quad (6.3)$$

Соотношение (6.3) показывает, что напряженность электрического поля в диэлектрике ослаблена по сравнению с вакуумом в  $\epsilon$  раз. Это связано с поляризацией диэлектриков в электрическом поле.

Графически любое поле можно изобразить в виде силовых линий, касательные к которым дают направление вектора напряженности в данной точке поля. Условились считать, что число силовых линий, проходящих через площадку единичной площади, пропорционально  $E$ . Направление силовых линий выбирается по силовому воздействию поля на единичный положительный заряд («пробный заряд»). На рис. 6.2 силовыми линиями представлены электрические поля, созданные точечным положительным (рис. 6.2а), отрицательным (рис. 6.2б) и двумя разноименными зарядами (рис. 6.2в).

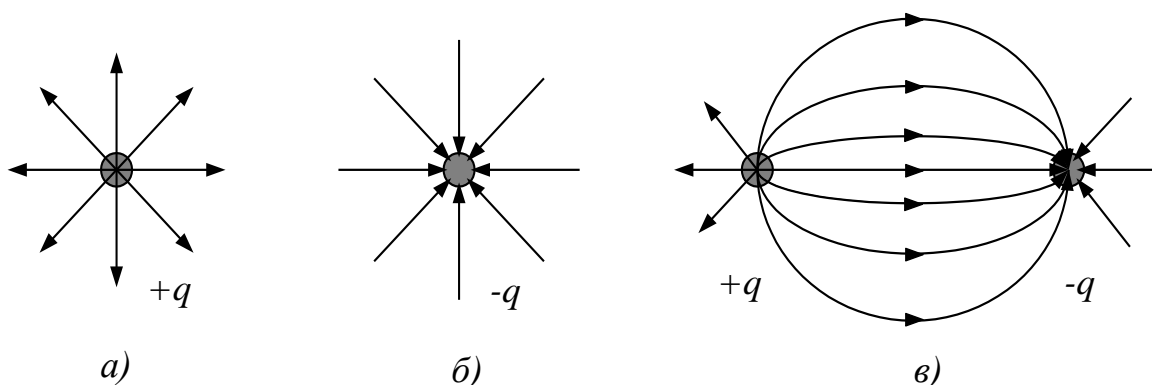


Рис. 6.2

Если электрическое поле создается несколькими зарядами, то напряженность поля в любой точке пространства равна векторной сумме напряженности полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности. Это – **принцип суперпозиции**. Рис. 6.3 иллюстрирует принцип суперпозиции в случае электрического поля, созданного двумя разноименными зарядами  $+q_1$  и  $-q_2$ :

$$\vec{E}_A = \vec{E}_1 + \vec{E}_2.$$

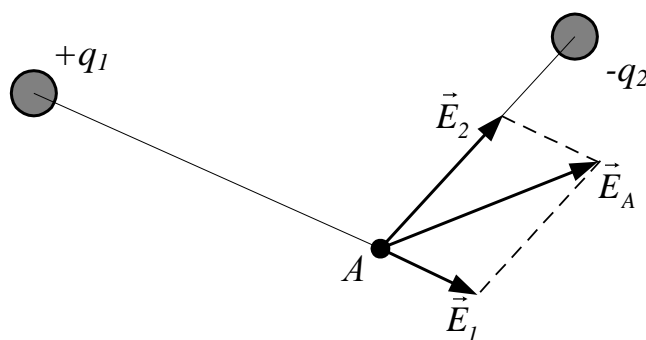


Рис. 6.3

### Поток вектора напряженности электрического поля.

#### Теорема Остроградского – Гаусса

Несмотря на то, что принцип суперпозиции всегда определяет результирующую напряженность поля, созданного многими зарядами, практическое применение его в случае большого числа зарядов приводит к

громоздким вычислениям. Решение подобной задачи существенно облегчается при использовании теоремы Остроградского – Гаусса.

Прежде чем сформулировать теорему, введем понятие потока  $N$  вектора  $\vec{E}$  через произвольную площадку  $dS$ :  $dN = E dS$  (если силовые линии перпендикулярны площадке). Пусть существуют какие-то заряды, создающие поле. Электрическое поле, созданное ими в неограниченной однородной среде, обладает замечательной особенностью:

Полный поток  $N$  вектора напряженности электрического поля, пронизывающий произвольную замкнутую поверхность  $S$ , определяется алгебраической суммой зарядов, находящихся внутри поверхности и равен

$$N = \oiint_S E dS = \frac{\sum q_i}{\epsilon \epsilon_0}. \quad (6.4)$$

Это теорема Остроградского – Гаусса.

Если  $\sum q_i = 0$ , то  $N = 0$ . Это означает, что линии напряженности начинаются на «+» и кончаются на «-» зарядах. Заряды – источники электрического поля.

Когда внутри поверхности нет зарядов, то  $N = 0$ . Это может означать также, что сколько линий напряженности входит внутрь поверхности, столько же и выходит.

Воспользовавшись теоремой Остроградского – Гаусса, рассчитаем напряженности электрических полей в нескольких конкретных случаях.

1. Рассчитать напряженность электрического поля внутри и вне тонкой металлической сферы радиуса  $r_0$ , несущей заряд  $q$ .

Построим гауссовы сферы радиусами  $r > r_0$  и  $r_1 < r_0$  (рис. 6.4а) и посчитаем  $N = ES$  через них. При  $r \geq r_0$ :

$E \cdot 4\pi r^2 = q / \epsilon \epsilon_0$ , откуда  $E = q / 4\pi \epsilon \epsilon_0 r^2$ ,  
причем при  $r = r_0$

$$E_0 = q / 4\pi \epsilon \epsilon_0 r_0^2.$$

При  $r_1 < r_0$

$$E \cdot 4\pi r_1^2 = 0,$$

так как внутри сферы зарядов нет и  $E = 0$ .

График  $E(r)$  представлен на рис. 6.4б.

2. Рассчитать электрическое поле между двумя параллельными, бесконечно большими, разноименно заряженными металлическими плоскостями с поверхностными плотностями заряда  $+\sigma$  и  $-\sigma$  (рис. 6.5).

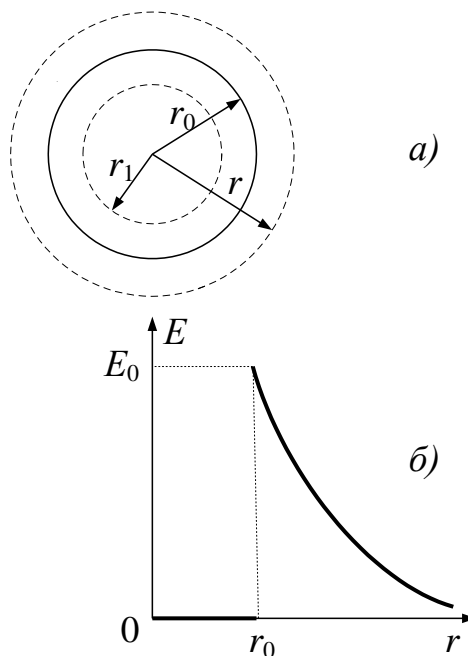


Рис. 6.4

Гауссовы поверхности будем выбирать в виде цилиндров с основаниями  $S$ , параллельными плоскостям и боковыми образующими цилиндров, направленными вдоль силовых линий.

В случае гауссовой поверхности 1:

$$E \cdot 2S = -\frac{\sigma S}{\epsilon\epsilon_0} + \frac{\sigma S}{\epsilon\epsilon_0} = 0,$$

откуда  $E=0$ . Следовательно, вне плоскостей электрическое поле равно 0. Через основания гауссовой поверхности 2 поток будет равен:

$$E \cdot S + 0 \cdot S = \sigma S / \epsilon\epsilon_0,$$

откуда

$$E = \sigma / \epsilon\epsilon_0. \quad (6.5)$$

Электрическое поле в пространстве между плоскостями однородно, т.е. не зависит от координаты.

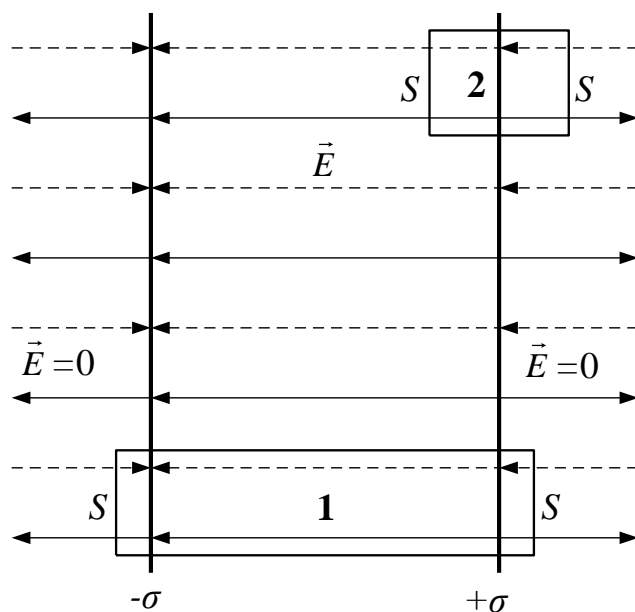


Рис. 6.5

### Потенциальный характер электрического поля. Потенциал

Вычислим работу по перемещению пробного заряда  $q_1 > 0$  в электрическом поле, созданном зарядом  $q > 0$  из бесконечности в данную точку поля 1 (рис.6.6):

$$A_1 = \int_{\infty}^{r_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{\infty}^{r_1} F \cdot dr = -\int_{\infty}^{r_1} \frac{q \cdot q_1}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q \cdot q_1}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r} \Big|_{\infty}^{r_1} = q_1 \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_1} = q_1 \varphi_1.$$

Величину  $\varphi_1$  называют **потенциалом** электростатического поля в точке 1:

$$\varphi_1 = \frac{A_1}{q_1}. \quad (6.6)$$

Потенциал электростатического поля равен работе против сил поля  $\vec{F}$  по перемещению единичного положительного заряда из точки, где  $\varphi = 0$  (например,  $r = \infty$ ), в данную точку поля. Потенциал  $\varphi > 0$ , если  $q > 0$  (силы отталкивания);  $\varphi < 0$ , если  $q < 0$  (силы притяжения).

Графики  $\varphi(r)$  для рассмотренных случаев представлены на рис. 6.7.

Введя понятие потенциала, можно выразить работу против сил поля по перемещению заряда  $q_1$  в поле из точки 1 в точку 2 (рис. 6.6). Извилистой линией показана траектория движения заряда  $q_1$ .

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{q \cdot q_1}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r} \Big|_{r_1}^{r_2} = q_1 (\varphi_2 - \varphi_1) = -q_1 (\varphi_1 - \varphi_2) = -q_1 U_{12}, \quad (6.7)$$

где  $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$  – разность потенциалов между точками 1 и 2.

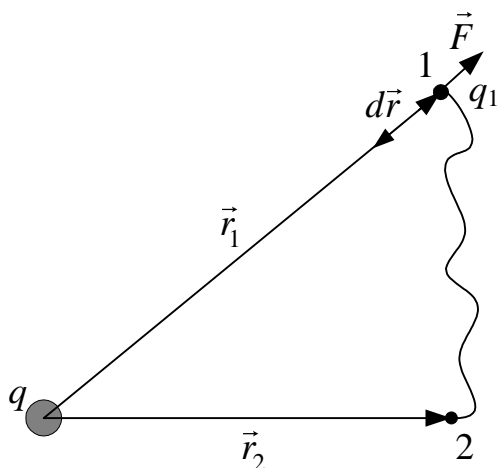


Рис. 6.6

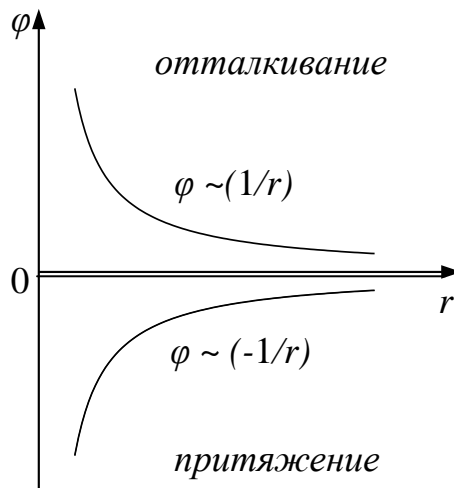


Рис. 6.7

Работа сил электростатического поля равна произведению заряда на разность потенциалов начальной и конечной точек пути и не зависит от траектории движения.

Из (6.7), в частности, следует, что при движении заряда в электростатическом поле по замкнутому контуру работа равна нулю. Это характерная особенность **потенциального поля**. Условие равенства нулю работы по замкнутому контуру часто используют для определения потенциальности поля.

### Связь между потенциалом и напряженностью поля

В любом электростатическом поле можно указать поверхности, все точки которых имеют один и тот же потенциал. Такие поверхности называют **эквипотенциальными**.

В соответствии с (6.7) работа при перенесении заряда по эквипотенциальной поверхности равна нулю. С другой стороны, работа силы равна нулю только в том случае, когда сила перпендикулярна перемещению. Таким образом, эквипотенциальная поверхность перпендикулярна силовым линиям электрического поля, причем вектор  $\vec{E}$  всегда направлен в сторону убывания потенциала (рис. 6.8):

$$E = -\frac{d\phi}{dr}. \tag{6.8}$$

Для поля точечного заряда – центрального поля:

$$E = -\frac{d}{dr} \left( \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}.$$

Потенциал поля  $\phi$  связан, таким образом, с величиной напряженности:



$$\varphi = -\int E \cdot dr. \quad (6.9)$$

Поскольку в (6.9) интеграл неопределенный, то потенциал всегда вычисляется с точностью до постоянной. Это не сказывается на физических результатах, поскольку работа в электрическом поле определяется разностью потенциалов.

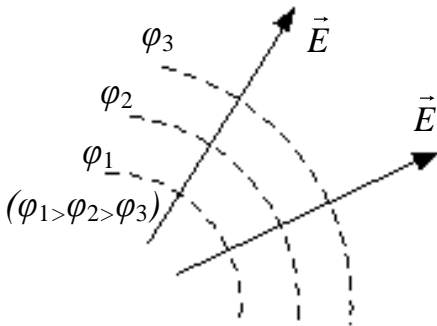


Рис. 6.8

В однородном электрическом поле между двумя бесконечными плоскопараллельными пластинами с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$  потенциал равен:

$$\varphi = E \cdot x = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0} \cdot x. \quad (6.10)$$

Здесь  $x$  расстояние от пластины, потенциал которой принят за нуль.

Если  $x_1$  и  $x_2$  координаты каких-либо точек поля по направлению силовой линии однородного поля, то разность потенциалов между этими точками:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = E(x_1 - x_2). \quad (6.11)$$

### Емкость. Конденсаторы

К понятию емкости можно прийти, рассматривая связь между зарядом, сообщенным некоторому проводнику, и разностью потенциалов электрического поля, которое при этом возникает. Рассмотрим это на примере двух параллельных плоских пластин площадью  $S$ , расстояние между которыми  $d$ ; одной из пластин сообщим заряд  $-q$ , другой  $+q$ .

В соответствии с (6.10) и (6.11) разность потенциалов  $U$  равна:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0} \cdot d = \frac{q}{\epsilon\epsilon_0 S} \cdot d. \quad (6.12)$$

Отношение заряда к полученной разности потенциалов называют **электрической емкостью** (или емкостью) системы:

$$C = \frac{q}{U}. \quad (6.13)$$

Емкость  $C$  зависит только от геометрии проводника и диэлектрических свойств окружающей среды и измеряется в фарадах ( $1\text{Ф}=1\text{Кл/В}$ ).

Из отношений (6.12) и (6.13) следует, что емкость двух параллельных плоскостей (плоский конденсатор) равна:

$$C = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d}. \quad (6.14)$$

## Способы соединения конденсаторов

1. Параллельное соединение (рис. 6.9).

На обоих конденсаторах одинаковая разность потенциалов:  $U = \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2}$ .

Тогда заряды на каждом из конденсаторов:

$$q_1 = C_1 U, \quad q_2 = C_2 U,$$

$$U = \frac{q_1 + q_2}{C} = \frac{(C_1 + C_2)U}{C},$$

откуда

$$C = C_1 + C_2. \quad (6.15)$$

При параллельном соединении конденсаторов общая емкость  $C$  равна сумме емкостей конденсаторов.

2. Последовательное соединение (рис. 6.10).

Заряды одинаковы на обоих конденсаторах:

$$U = U_1 + U_2, \quad U_1 = \frac{q}{C_1}, \quad U_2 = \frac{q}{C_2}$$

$$\frac{q}{C} = U_1 + U_2 = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2},$$

откуда

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}. \quad (6.16)$$

При последовательном соединении конденсаторов их общая емкость меньше емкости каждого из конденсаторов.

### Примеры решения задач

**Задача 6.1.** Два шарика одинаковых радиусов и массы подвешены на нитях так, что их поверхности соприкасаются. После сообщения шарикам заряда  $q_0 = 4 \cdot 10^{-7}$  Кл они оттолкнулись друг от друга и разошлись на угол  $60^\circ$ . Найти массу шариков, если расстояние от точки подвеса до центра шарика равно 20 см.

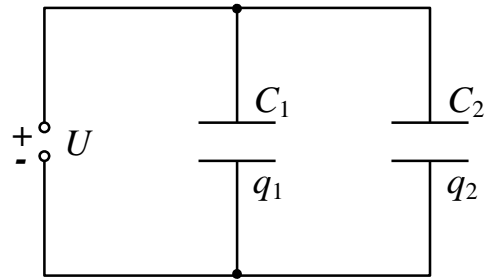


Рис. 6.9

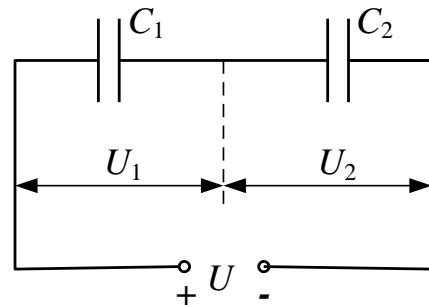


Рис. 6.10

## Анализ и решение

Сделаем чертеж к задаче (рис. 6.11).

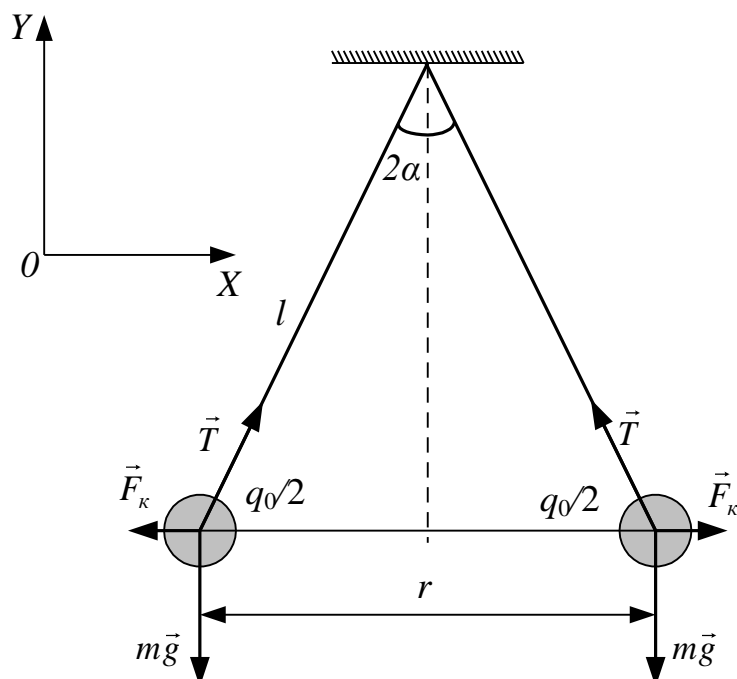


Рис. 6.11

Изобразим на чертеже силы, действующие на каждый шарик в отдельности:  $m\vec{g}$  – сила, тяжести шарика,  $\vec{T}$  – сила натяжения нити подвеса шарика,  $\vec{F}_K$  – сила кулоновского отталкивания. После сообщения шарикам заряда  $q_0$  они оттолкнулись друг от друга и симметрично разошлись на угол  $2\alpha$ . Так как шарики находятся в равновесии, то равнодействующая сил, действующая на шарик, равна нулю:

$$m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_K = 0. \quad (1)$$

В проекциях на ось  $X$  и  $Y$  для левого шарика получим:

$$-F_K + T \sin \alpha = 0, \quad (2)$$

$$T \cos \alpha - mg = 0. \quad (3)$$

Исключая силу натяжения  $T$  из (2) и (3), найдем величину силы тяжести:

$$mg = \frac{F_K}{\operatorname{tg} \alpha}. \quad (4)$$

Запишем в явном виде выражение для силы кулоновского отталкивания  $F_K$ . Так как взаимодействуют шарики – сферически заряженные тела, то силу кулоновского взаимодействия можно записать так же, как при взаимодействии точечных зарядов, только в этом случае  $r$  – расстояние между центрами сфер:

$$F_k = \frac{q_w^2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}, \quad (5)$$

где  $q_w = q_0/2$  (шарики одинаковые и заряд  $q_0$  разделится между ними поровну);  $r = 2l \cdot \sin \alpha$ ;  $\epsilon = 1$  (электрическое взаимодействие происходит в вакууме).

Используя (4) и (5), получим окончательное выражение для массы шариков:

$$m = \frac{q_0^2}{4 \cdot 4\pi l_0 \cdot 4l^2 \sin^2 \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot g}. \quad (6)$$

Подставляя исходные данные, рассчитаем величину массы:

$$m = 1,6 \cdot 10^{-2} \text{ кг.}$$

**Задача 6.2.** Электрон, пройдя в плоском конденсаторе путь от одной пластины до другой, приобретает скорость  $10^8$  см/с. Расстояние между пластинами 5,3 мм.

- Найти: 1) разность потенциалов между пластинами;  
 2) напряженность электрического поля внутри конденсатора;  
 3) поверхностную плотность заряда на пластинах.

#### Анализ и решение

Электрон движется в поле плоского конденсатора перпендикулярно его пластинам (рис. 6.12) под действием электрической силы  $\vec{F} = -e\vec{E}$  ( $e$  – заряд электрона;  $\vec{E}$  – вектор напряженности поля), которая производит над ним работу.

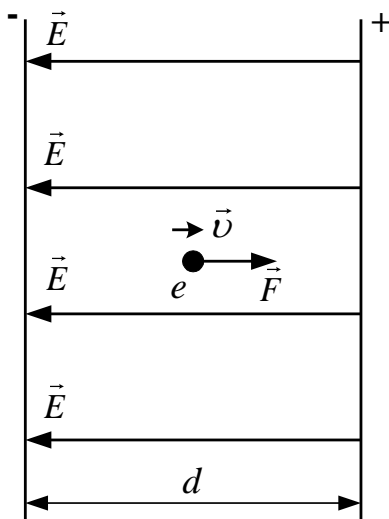


Рис. 6.12

Наличие силы тяжести электрона  $m\vec{g}$ , направленной вертикально вниз, не учитываем, так как при малом расстоянии между пластинами плоского конденсатора  $d$  ее влиянием (приводящим к искривлению прямолинейной траектории движения  $e$ ) можно пренебречь.

Электрон, пролетая между пластинами конденсатора, проходит разность потенциалов  $U$  и приобретает кинетическую энергию  $mv^2/2 = eU$ , откуда:

$$U = \frac{mv^2}{2e}. \quad (1)$$

Напряженность электрического поля в конденсаторе:

$$E = \frac{U}{d} = \frac{mv^2}{2ed}. \quad (2)$$

Поверхностную плотность заряда на пластинах конденсатора вычислим, воспользовавшись соотношением (6.5):

$$\sigma = E \varepsilon_0, \quad (3)$$

так как  $\varepsilon = 1$ .

Подставляя данные из условия задачи, получим численные значения  $E$ ,  $U$  и  $\sigma$ :

$$U = 2,8 \text{ В}; E = 530 \text{ В/м}; \sigma = 4,7 \cdot 10^{-9} \text{ Кл/м}^2.$$

**Задача 6.3.** Электрон, прошедший ускоряющую разность потенциалов  $U_1 = 300 \text{ В}$ , влетает в плоский горизонтальный конденсатор параллельно пластинам на равном расстоянии от них. К пластинам конденсатора приложена разность потенциалов  $U_2 = 30 \text{ В}$ , расстояние между пластинами  $d = 1,4 \text{ см}$ , длина конденсатора  $l = 6 \text{ см}$ . На расстоянии  $L = 12 \text{ см}$  от конца конденсатора расположен флуоресцирующий экран. Найти, на сколько сместится электрон в вертикальном направлении под действием электрического поля за время его движения в конденсаторе.

### Анализ и решение

Изобразим на чертеже траекторию движения электрона (рис. 6.13).

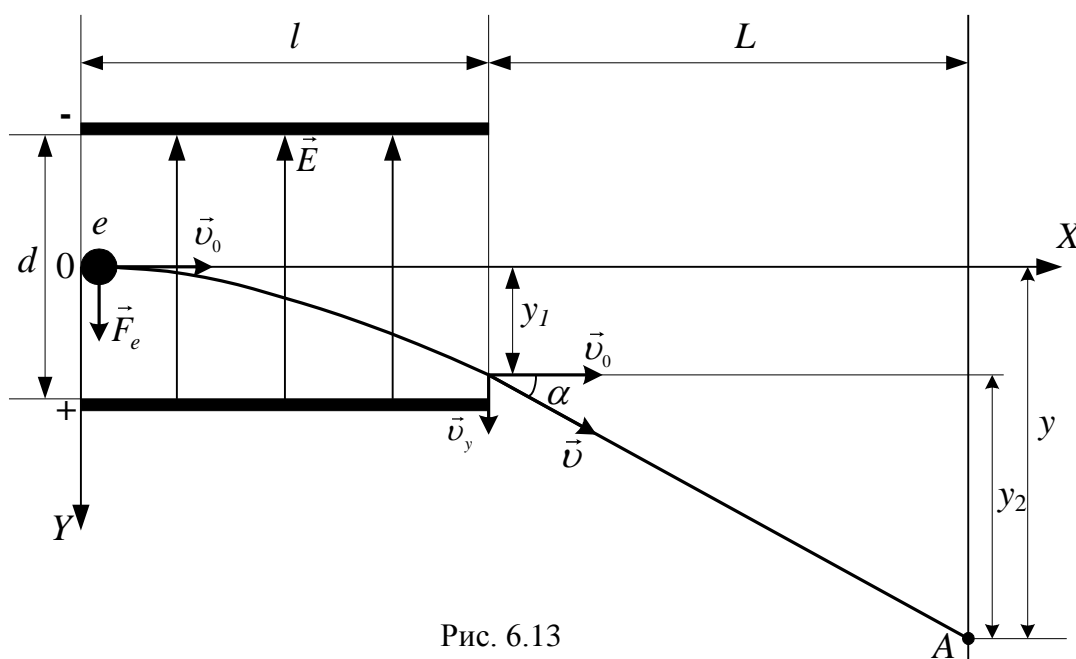


Рис. 6.13

В однородном электрическом поле  $\vec{E}$  плоского конденсатора электрон будет двигаться по параболической траектории. Покажем это. На электрон будет действовать сила  $\vec{F} = -e\vec{E}$ , направленная перпендикулярно вектору его начальной скорости  $\vec{v}_0$ . Выберем систему координат, направив ось  $X$  вдоль пластин конденсатора, а ось  $Y$  – перпендикулярно пластинам вертикально вниз. Вдоль оси  $X$  электрон будет двигаться равномерно со скоростью  $v_0$ :

$$x = v_0 \cdot t. \quad (1)$$

Вдоль оси  $Y$  на электрон действует сила  $\vec{F}$ , сообщающая электрону ускорение  $|\vec{a}| = \frac{eE}{m}$ , начальная скорость электрона вдоль оси  $Y$  равна нулю.

Запишем зависимость координаты  $y$  электрона от времени:

$$y = \frac{at^2}{2} = \frac{eE}{2m}t^2. \quad (2)$$

Тогда уравнение траектории электрона,двигающегося между пластинами плоского конденсатора, имеет вид:

$$y = \frac{eE}{2m} \cdot \frac{x^2}{v_0^2}. \quad (3)$$

Уравнение (3) – это уравнение параболы, причем  $E = U_2/d$ .

Величину  $v_0$  электрона найдем из условия, что он прошел ускоряющую разность потенциалов  $U_1$ , т.е.

$$\begin{aligned} \frac{mv_0^2}{2} &= eU_1, \text{ откуда} \\ v_0 &= \sqrt{\frac{2eU_1}{m}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Окончательно запишем:

$$y = \frac{U_2}{4dU_1} x^2. \quad (5)$$

Найдем величину  $y_1$  – отклонение электрона по вертикали в момент его вылета из конденсатора, т.е. при  $x = l, y = y_1$ :

$$y = \frac{U_2}{4dU_1} l^2.$$

В момент вылета из конденсатора мгновенная скорость электрона  $\vec{v}$  направлена по касательной к его траектории и составляет угол  $\alpha$  с осью  $X$ . Вне поля конденсатора до флуоресцирующего экрана электрон будет лететь по инерции со скоростью  $\vec{v}$ . Тогда он попадет на экран в точку  $A$  с координатой  $y = y_1 + y_2$ , причем  $y_2 = L \operatorname{tg} \alpha$ .

Рассчитаем  $\operatorname{tg} \alpha$  (рис. 6.13):

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y}{v_0}$  при  $y = y_1$ . При равноускоренном движении  $v_y = dt = \frac{eE}{m}t$  и при  $y = y_1, t = t_{\text{дв}} = l/v_0$ ; таким образом,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{eEl}{mv_0 \cdot v_0} = \frac{eU_2 l}{mv_0^2 d} = \frac{U_2 l}{2U_1 d}.$$

Окончательно получим выражение для величины  $y$ :

$$y = \frac{U_2 l^2}{4dU_1} = \frac{U_2 l L}{2U_1 d}.$$

Подставив исходные данные из условия задачи, получим, что

$$y \approx 3 \text{ см.}$$

**Задача 6.4.** Разность потенциалов между точками  $A$  и  $B$  (рис. 6.14) равна 400 В. Емкость первого конденсатора 2 мкФ, емкость второго – 3 мкФ. Найти заряд и разность потенциалов на обкладках каждого конденсатора.

**Анализ и решение**

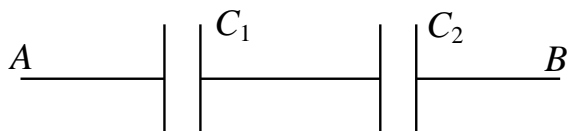


Рис. 6.14

Обратимся к рис. 6.14. На нем изображена батарея из двух конденсаторов  $C_1$  и  $C_2$  соединенных последовательно. Эквивалентную емкость  $C$  определяем по формуле (6.16), откуда:

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}. \quad (1)$$

Заряд на батарее  $q$  равен:

$$q = C \cdot U. \quad (2)$$

При последовательном соединении конденсаторов заряд на каждом конденсаторе равен общему заряду батареи (рис. 6.15)

$$q = q_1 = q_2. \quad (3)$$

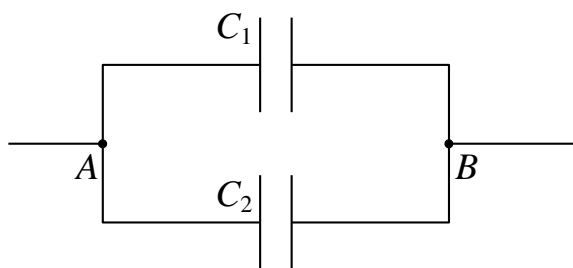
Тогда напряжение и заряд на конденсаторах равны:

$$U_1 = \frac{q}{C_1} = \frac{C_2 U}{C_1 + C_2} = 240 \text{ В},$$

$$U_2 = \frac{q}{C_2} = \frac{C_1 U}{C_1 + C_2} = 160 \text{ В}, \quad q = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \cdot U = 4.8 \cdot 10^{-4} \text{ Кл}.$$

**Задача 6.5.** Конденсатор емкостью  $C_1 = 6$  мкФ, заряженный до напряжения  $U_1 = 127$  В, соединен параллельно с конденсатором  $C_2 = 4$  мкФ, заряженным до напряжения  $U_1 = 220$  В. Определите емкость батареи конденсаторов и напряжение на ее зажимах.

**Анализ и решение**



$$q = q_1 + q_2. \quad (2)$$

Рис. 6.16

На рис. 6.16 показан способ параллельного соединения конденсаторов в батарею. Общая емкость батареи  $C$  равна:

$$C = C_1 + C_2. \quad (1)$$

Напряжение на зажимах АВ  $U = q / C_{\Sigma}$ ,

где заряд  $q$  равен:

Так как  $q_1 = C_1 U_1$  и  $q_2 = C_2 U_2$ , то

$$U = \frac{C_1 U_1 + C_2 U_2}{C_1 + C_2}. \quad (3)$$

Подставляя в (1) и (3) числовые данные, получим:  $C = 10$  мкФ,  $U = 164$  В.

## ТЕМА 7

### ПОСТОЯННЫЙ ТОК

#### Понятие об электрическом токе. Постоянный ток и условия его существования

Известно, что устойчивое равновесие свободных зарядов, находящихся под действием сил электростатического поля, невозможно. Под действием электрического поля свободные заряды приходят в движение. Упорядоченное движение электрических зарядов называется **электрическим током**. Внешние проявления тока – это, например, нагревание проводника, по которому проходит электрический ток.

Сила электрического тока равна заряду  $q$ , проходящему через поперечное сечение проводника в единицу времени:

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad (7.1)$$

Поскольку заряд – скалярная величина, то и  $I$  – скаляр. Величину  $I$  принято называть **силой тока**. Единица силы тока – ампер (А) – одна из основных единиц в СИ. Применяющаяся в электростатике единица заряда – Кулон (Кл) связана с ампером простым соотношением:

$$1\text{Кл} = 1\text{А} \cdot 1\text{с}.$$

Для того чтобы существовал постоянный ток, необходимо электрическое поле поддерживать постоянным. Такое электрическое поле принято называть **стационарным**.

#### Классическая электронная теория электропроводности металлов

В металлах всегда (независимо от внешних условий) существуют свободные электроны. В электрическом поле  $\vec{E}$  на них действует сила  $\vec{F} = -e\vec{E}$ , благодаря которой электрон приобретает ускорение, вследствие чего должна возрасти его скорость. Однако опыт показывает, что при  $\vec{E} = \text{const}$  ток тоже постоянен.

Из постоянства тока следует, что скорость электронов постоянна. Раз скорость электронов при  $\vec{E} = \text{const}$  не растет, значит, электроны испытывают какие-то взаимодействия внутри металла.

Действительно, в отсутствие электрического поля электроны в металле взаимодействуют с положительными ионами, расположенными в узлах кристаллической решетки (на рис. 7.1 они изображены в виде кружочков). При упругих соударениях с атомами кристаллической решетки электроны меняют свой импульс. Благодаря этому движение электронов в металле, подобно



движению атомов и молекул в идеальном газе, носит хаотический характер. В электрическом поле хаотический характер движения электронов сохраняется, но возникает дрейф электронов в направлении сил поля. При этом соударения с атомами кристаллической решетки становятся неупругими, и электроны отдают им часть энергии, приобретенной ими в электрическом поле.

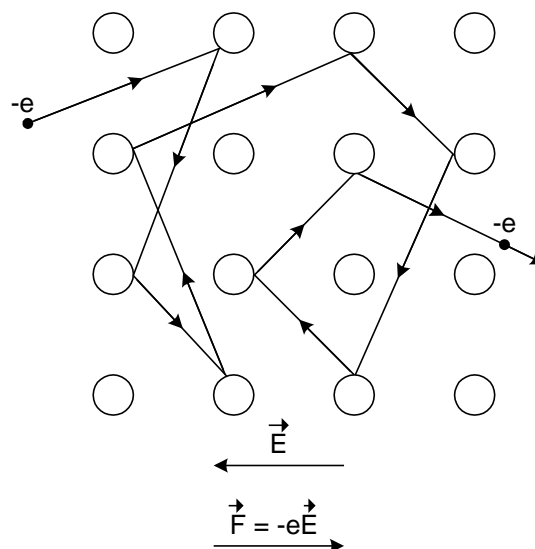


Рис. 7.1

На рисунке показано направление  $\vec{E}$  и  $\vec{F}$  с учетом отрицательного заряда электрона. Однако за **направление электрического тока принято считать направление движения положительного заряда**

(это сложилось исторически), поэтому в дальнейшем все соотношения будем писать для положительного заряда, используя термин «свободный носитель заряда».

Из рис. 7.1 видно, что расстояния, проходимые свободным зарядом между двумя соударениями, неодинаковы, и, следовательно, неодинаково время между двумя соударениями. Введем среднее время свободного пробега заряда между соударениями  $\tau$ . Тогда для одного свободного заряда можно записать:

$$eE \tau = F \tau = m a \tau = m v_{др}, \quad (7.2)$$

где  $v_{др} = a\tau$  – дрейфовая скорость в электрическом поле  $E$ . Из (7.2) следует, что

$$v_{др} = \frac{e\tau}{m} E = \mu E, \quad (7.3)$$

здесь  $\mu$  – подвижность носителей заряда, численно равная дрейфовой скорости в поле  $E=1$  В/м.

Если ввести понятие плотности тока  $j = I/S$ , т.е. силы тока через единичное поперечное сечение  $S$  проводника, то она равна:

$$j = en v_{др}, \quad (7.4)$$

где  $n$  – концентрация свободных носителей заряда в проводнике.

Подставив в (7.4)  $v_{др}$  из (7.3), получим:

$$j = en\mu E = \sigma E, \quad (7.5)$$

где  $\sigma = en\mu$  – удельная электропроводность проводника, а величина  $\rho = 1/\sigma$  – удельное сопротивление проводника.

Выражение (7.5) называется **законом Ома в дифференциальной форме**.

## Закон Ома для однородного участка цепи. Сопротивление проводника

Закон Ома первоначально был получен на основании обобщения экспериментальных результатов. Мы же выведем его из дифференциальной записи этого закона (7.5).

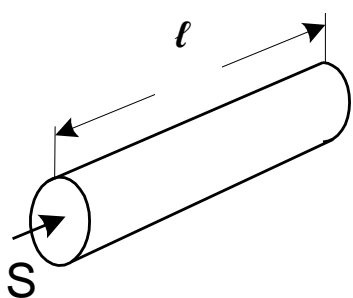


Рис. 7.2а

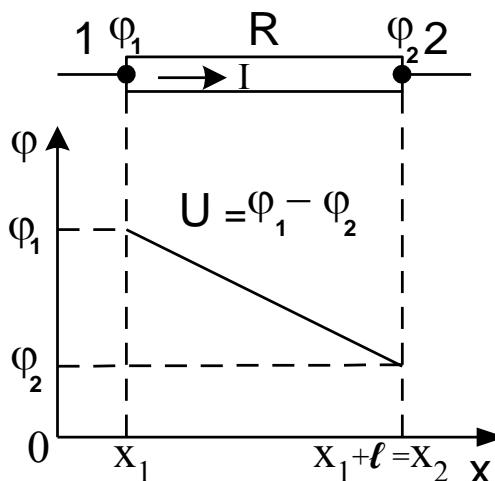


Рис. 7.2б

Рассмотрим однородный проводник длиной  $\ell$  и поперечным сечением  $S$  (рис. 7.2а).

Поскольку проводник однородный, то однородно и электрическое поле в нем. Поэтому разность потенциалов (падение напряжения  $U$ ) на его концах связана с напряженностью  $E$  соотношением:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = E \cdot \ell \quad (7.6)$$

(аналогично однородному полю в электростатике (см. (6.9))).

Так как сила постоянного тока  $I$  равна

$$I = j \cdot S, \quad (7.7)$$

то, подставив (7.6) и (7.7) в (7.5), получим:

$$I/S = \sigma U/\ell \quad \text{или} \quad U/I = \ell/\sigma S.$$

Величина

$$R = \ell/\sigma S = \rho \ell/S \quad (7.8)$$

получила название сопротивления проводника.

Из приведенных выше соотношений легко получить:

$$I = U/R. \quad (7.9)$$

Это закон Ома для однородного участка цепи.

Ток на однородном участке цепи прямо пропорционален разности потенциалов, приложенной на концах этого участка, и обратно пропорционален сопротивлению этого участка.

За направление тока принято движение положительных зарядов, которые движутся от более высокого потенциала к более низкому. Таким образом, при движении вдоль проводника в направлении протекающего тока наблюдается постепенное понижение потенциала (рис. 7.2б). Разность потенциалов  $U = \varphi_1 - \varphi_2 = IR$  на концах проводника называется падением напряжения на нем или просто напряжением.

**Соппротивление проводника  $R$**  – это коэффициент пропорциональности между  $U$  и  $I$  в пределах выполнимости закона Ома. Как видно из (7.8),  $R$  не зависит ни от  $U$ , ни от  $I$ . Единицей измерения сопротивления в СИ является Ом ( $1 \text{ Ом} = 1 \text{ В/А}$ ), удельное сопротивление  $\rho$  измеряется в Ом·м.

### Сторонние силы, ЭДС источника тока

Если единственным источником электрического поля  $E$  в проводнике, по которому течет ток, являются электрические заряды на его концах, возбуждающие электростатическое поле, то при прохождении тока будет происходить непрерывная убыль суммарного заряда (взаимная нейтрализация этих «+» и «-» зарядов) и уменьшение  $E$  и  $j$ .

Для того чтобы  $j$  и  $E$  оставались постоянными, необходимы какие-то дополнительные силы или процессы, непрерывно создающие и пополняющие свободные электрические заряды на концах проводника с током.

Эти силы, отличные от сил электростатического происхождения, получили название сторонних сил. Всякое устройство, в котором возникают сторонние силы, называется источником тока, или источником электродвижущей силы (ЭДС).

ЭДС источника тока численно равна работе сторонних сил по перемещению единичного заряда по замкнутой цепи. Единицей измерения ЭДС в СИ является Вольт.

С энергетической точки зрения источник ЭДС – это источник энергии, который совершает работу посредством сторонних сил неэлектрической природы по перемещению электрического заряда по замкнутой цепи. Например, аккумулятор с ЭДС  $\varepsilon = 6 \text{ В}$  совершает работу  $A = 6 \text{ Дж}$  по перемещению по замкнутой цепи заряда  $q = 1 \text{ Кл}$ .

При движении заряда во внешней по отношению к источнику цепи происходит преобразование электрической энергии в тепловую (нагрев проводов). В источнике тока, наоборот, разделение зарядов и создание разности потенциалов на его зажимах происходит за счёт других форм энергии: химической, тепловой, механической и т.д.

### Закон Ома для замкнутой цепи

Омом было установлено, что если есть простая электрическая цепь (рис.7.3), состоящая из источника ЭДС  $\varepsilon$  с внутренним сопротивлением  $r$  и внешнего сопротивления  $R$ , то сила тока  $I$  в этой цепи равна:

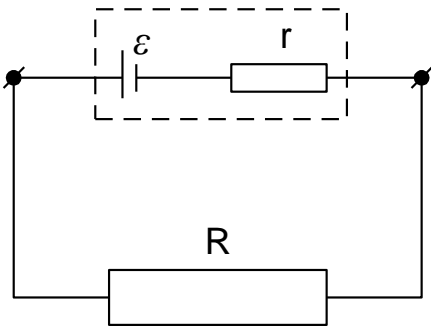


Рис.7.3

$$I = \varepsilon / (R + r). \quad (7.10)$$

Это закон Ома для замкнутой цепи.

Запишем соотношение (7.10) иначе:

$$\varepsilon = IR + Ir, \quad (7.11)$$

т.е. ЭДС равна сумме падений напряжения на внешнем и внутреннем (обведено на рис.7.3 штриховой линией) участках электрической цепи.

### Разветвленные цепи. Правила Кирхгофа

В практике часто встречаются разветвленные электрические цепи, отличающиеся от изображенной на рис. 7.3. Провести расчет токов и напряжений в сложных электрических цепях позволяют правила Кирхгофа.

Первое правило Кирхгофа: в каждой точке разветвления проводов электрической цепи алгебраическая сумма токов равна нулю. При этом принято считать токи, идущие к точке разветвления, и токи, исходящие от неё, величинами разных знаков. Для изображенного на рис. 7.4 разветвления проводов:

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0. \quad (7.12)$$

Если бы это правило не соблюдалось, то в точках разветвления проводов (узлах) накапливались электрические заряды. По мере накопления заряда изменялось электрическое поле между узлами, а потому токи не могли бы оставаться постоянным во времени. Поэтому первое правило Кирхгофа является следствием закона сохранения заряда.

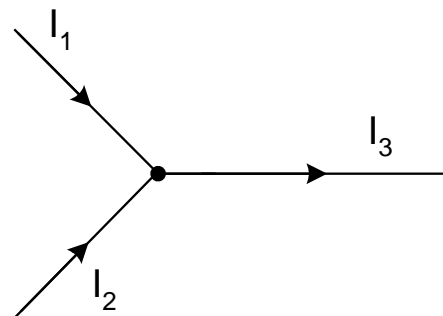


Рис. 7.4

Второе правило Кирхгофа: алгебраическая сумма ЭДС, действующих в любом замкнутом контуре, равна алгебраической сумме произведений токов в отдельных участках этого контура на сопротивления этих участков:

$$\sum_i \varepsilon_i = \sum_k I_k R_k, \quad (7.13)$$

где  $i$  – число ЭДС,  $k$  – число отдельных участков цепи.

Отличие этого выражения от закона Ома (7.10) в том, что на разных участках замкнутого контура токи могут быть разными как по величине, так и по направлению.

## Работа и мощность в цепи постоянного тока. Закон Джоуля – Ленца

При протекании электрического тока по замкнутой цепи совершается работа по переносу заряда. Из электростатики известно, что

$$A = U q = U I t. \quad (7.14)$$

Заряды приобретают кинетическую энергию за счет работы сил поля и передают ее кристаллической решетке в результате столкновений с нею.

Если ток течет по однородному проводнику, то  $U = IR$ , и соотношение (7.14) может быть приведено к иному виду;

$$IU t = I^2 R t = U^2 \frac{t}{R}. \quad (7.15)$$

Можно определить работу тока в единицу времени – мощность тока:

$$P = \frac{A}{t} = IU = I^2 R = \frac{U^2}{R}. \quad (7.16)$$

Это **закон Джоуля – Ленца**: мощность, выделяемая в цепи постоянного тока, равна произведению тока на напряжение.

### КПД источника тока

Мощность, расходуемая источником тока, частично выделяется во внешней цепи (полезная мощность), частично – на внутреннем сопротивлении источника тока (потери мощности). Применительно к электрической схеме, изображенной на рис. 7.3, коэффициент полезного действия (КПД) источника тока равен:

$$\eta = \frac{P_{\text{полезн}}}{P_{\text{полн}}} = \frac{I^2 R}{I^2 (R + r)} = \frac{R}{R + r} < 1, \quad (7.17)$$

а мощность, выделяемая на нагрузке:

$$P_{\text{полез}} = I^2 R = \varepsilon^2 R / (R + r)^2. \quad (7.18)$$

Определим условие, при котором в нагрузке  $R$  выделяется наибольшая мощность, полагая неизменными  $\varepsilon$  и  $r$ . Полезная мощность  $P_{\text{полезн}}$  максимальна, когда

$$\frac{dP_{\text{полезн}}}{dR} = \varepsilon^2 \frac{(R + r)^2 - 2R(R + r)}{(R + r)^4} = 0. \quad (7.19)$$

Отсюда следует, что этим условием является  $R = r$ .

Таким образом, на нагрузке выделяется максимальная мощность тогда, когда сопротивление нагрузки равно внутреннему сопротивлению источника тока. Такая нагрузка получила название согласованной нагрузки. На рис. 7.5 представлены графики зависимости полезной мощности и КПД от соотношения

между сопротивлением нагрузки и внутренним сопротивлением источника тока. Соотношение (7.17) и графики рис. 7.5 показывают, что в случае согласованной нагрузки  $\eta = 0,5$ , и  $\eta$  стремится к единице, если  $R \gg r$ .

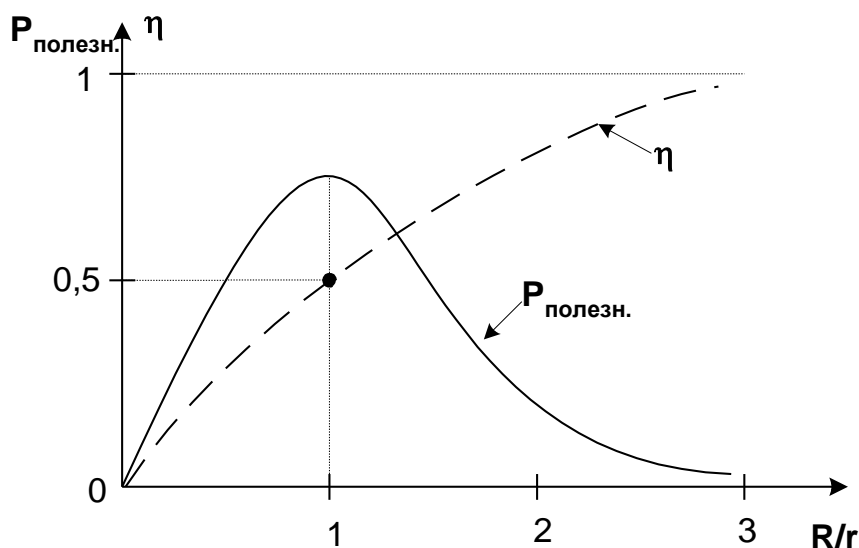


Рис. 7.5

### Примеры решения задач

**Задача 7.1.** Сколько витков нихромовой проволоки диаметром 1 мм надо намотать на фарфоровый цилиндр радиусом 2,5 см, чтобы получить обмотку сопротивлением 40 Ом? Какой ток проходит через обмотку печи, если на нее подано напряжение 100 В? Какой заряд пройдет через обмотку за 1 мин?

#### Анализ и решение

Число витков проволоки найдем из формулы для сопротивления проводника цилиндрической формы:

$$R = \rho \ell / S, \quad (1)$$

где  $\rho$  – удельное сопротивление материала проводника (нихром –  $\rho = 10^{-6}$  Ом·м);  $\ell = N \cdot 2\pi r$  – длина проводника,  $r$  – радиус цилиндра, на который намотана проволока;  $S = \pi d^2 / 4$  – площадь поперечного сечения проводника диаметром  $d$ .

Таким образом, число витков  $N$  нихромовой проволоки, необходимое для получения сопротивления  $R = 40$  Ом, равно:

$$N = d^2 R / 8r\rho. \quad (2)$$

Используя закон Ома для участка цепи, вычислим величину тока:

$$I = U / R, \quad (3)$$

а затем величину заряда, который пройдет в этом случае через поперечное сечение проводника за время  $t$ :

$$q = I \cdot t. \quad (4)$$

Подставляя числовые данные, получим:

$$N = \frac{40 \cdot 10^{-6}}{8 \cdot 2,5 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-6}} = 200 \text{ витков}, \quad I = 2,5 \text{ А}, \quad q = 150 \text{ Кл.}$$

**Задача 7.2.** Определить падение потенциала в сопротивлениях  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$  (рис. 7.6), если амперметр показывает 3 А,  $R_1 = 4$  Ом,  $R_2 = 2$  Ом,  $R_3 = 4$  Ом. Найти  $I_2$  и  $I_3$  – силу тока в сопротивлениях  $R_2$  и  $R_3$ .

### Анализ и решение

Точки  $B$  и  $C$  схемы являются точками разветвления, и согласно первому правилу Кирхгофа:

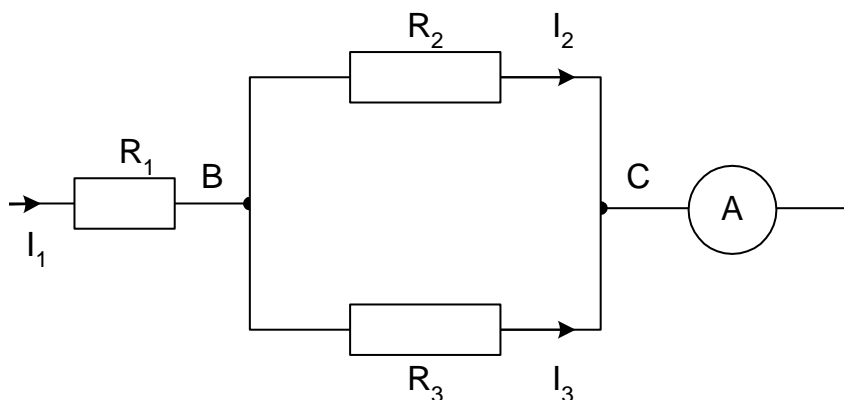


Рис. 7.6

$$I_1 = I_2 + I_3, \quad (1)$$

причем  $I_1$  – показания амперметра. Искомые напряжения найдем из закона Ома для участка цепи, а именно:

$$U_1 = I_1 R_1, \quad U_2 = I_2 R_2, \quad U_3 = I_3 R_3. \quad (2)$$

Сопротивления  $R_2$  и  $R_3$  включены параллельно, следовательно,  $U_2 = U_3$ , т.е.

$$I_2 / I_3 = R_3 / R_2. \quad (3)$$

Используя (1) и (3), найдем величины  $I_2$  и  $I_3$ :

$$I_2 = I_1 R_3 / (R_2 + R_3), \quad I_3 = I_1 R_2 / (R_2 + R_3). \quad (4)$$

Вычислим значения искомых величин, используя (2) и (4):

$$U_1 = 12 \text{ В}; \quad U_2 = U_3 = 4 \text{ В}; \quad I_2 = 2 \text{ А}; \quad I_3 = 1 \text{ А.}$$

**Задача 7.3.** Измерительный механизм амперметра имеет внутреннее сопротивление 1 Ом и рассчитан на измерение максимальной силы тока 100 мА. Вычислить: 1) сопротивление шунта к амперметру для измерения силы тока до 10 А; 2) добавочное сопротивление к этому прибору для измерения напряжения до 10 В.

### Анализ и решение

Амперметр – прибор для измерения силы тока включают в электрическую цепь последовательно с нагрузкой. Вольтметр предназначен для измерения напряжения в цепи и подключается параллельно нагрузке.

Для увеличения пределов измерения амперметра используют шунты, а для увеличения пределов измерения вольтметра – добавочные сопротивления. Шунт всегда включается параллельно измерительному механизму амперметра, а добавочное сопротивление – последовательно с вольтметром. Таким образом, получают приборы, позволяющие измерять токи и напряжения значительно большей величины, чем номинальные значения для данного измерительного механизма. Задачи на определение сопротивлений  $R_{ш}$  и добавочных сопротивлений  $R_{д}$  можно решать как обычные задачи на последовательное и параллельное соединение резисторов (рис. 7.7 и 7.8). Однако в учебной литературе выведены формулы для расчета  $R_{ш}$  и  $R_{д}$ :

$$R_{ш} = R_{вн} / (n - 1) \quad (1)$$

$$R_{д} = R_{вн} (n - 1), \quad (2)$$

где  $R_{вн}$  – внутреннее сопротивление измерительного механизма прибора;  
 $n$  – число, показывающее, во сколько раз увеличены пределы измерения амперметра и вольтметра соответственно, по сравнению с их номинальной величиной ( $I_n$  и  $U_n$ ) в отсутствие  $R_{ш}$  и  $R_{д}$ .

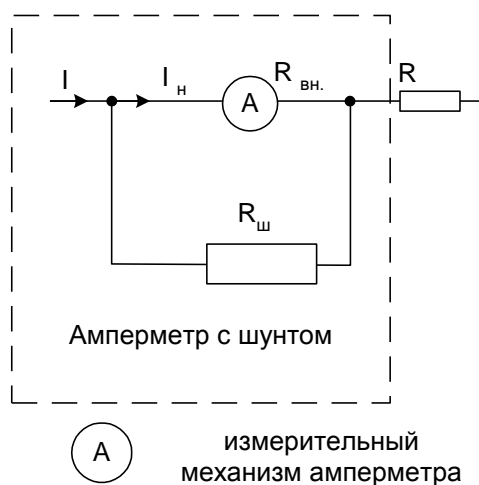


Рис. 7.7

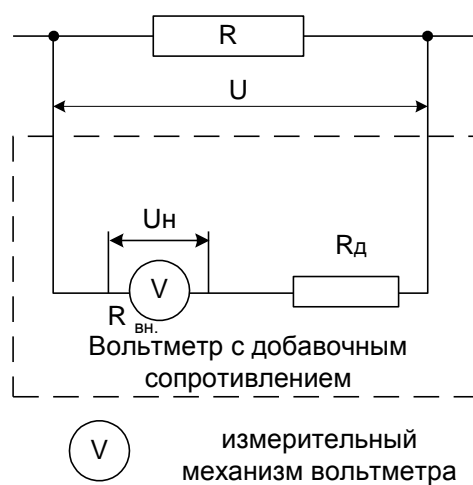


Рис. 7.8



Из соотношений (1) и (2) следует, что, так как  $n$  всегда больше единицы, то  $R_{ш} \ll R_{вн}$ , а  $R_{д} \gg R_{вн}$ .

Используя (1) и (2), запишем соотношения для вычисления сопротивления шунта и добавочного сопротивления, исходя из данных задачи:

$$R_{ш} = R_{вн} / \left( \frac{I}{I_n} - 1 \right) \quad (3)$$

$$R_{д} = R_{вн} \left( \frac{U}{U_n} - 1 \right), \quad (4)$$

где  $U_n = I_n \cdot R_{вн}$  – максимальное напряжение, на которое рассчитан измерительный механизм прибора.

Произведя расчет по формулам (3) и (4), найдем, что  $R_{ш} \approx 0,01$  Ом,  $R_{д} \approx 99$  Ом.

**Задача 7.4.** Считая сопротивление вольтметра бесконечно большим, определяют сопротивление реостата  $R$  по показаниям амперметра и вольтметра, включенных по схеме, приведенной на рис. 7.9. Найти относительную погрешность найденной величины сопротивления, если в действительности сопротивление вольтметра равно  $R_V$ . Задачу решить для  $R_V = 1000$  Ом и  $R$ , равного: 1) 10 Ом, 2) 100 Ом, 3) 1000 Ом.

#### Анализ и решение

Метод определения сопротивления реостата  $R$  по показаниям амперметра и вольтметра, включенных в схему, как показано на рис. 7.9, основан на применении закона Ома для участка цепи.

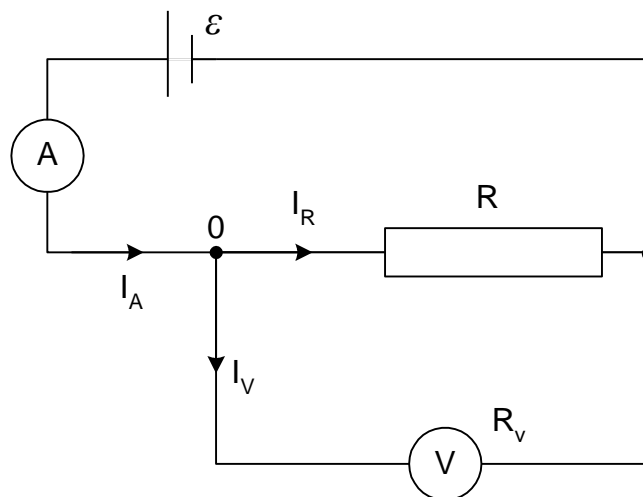


Рис.7.9

Истинное значение сопротивления реостата  $R$  может быть найдено следующим образом:

$$R = U_R / I_R, \quad (1)$$

где  $U_R$  - падение напряжения на сопротивлении  $R$  реостата;

$I_R$  - величина тока, протекающего через него.

Однако, при таком способе подключения амперметра и вольтметра, как приведено на рис 7.9, для измерения  $U_R$  и  $I_R$  показания вольтметра  $U_V = U_R$ , а показания амперметра  $I_A$  будут больше  $I_R$ . Это связано с тем, что т. 0 схемы – точка разветвления, а согласно первому правилу Кирхгофа

$$I_A = I_R + I_V, \quad (2)$$

т.е. действительно,  $I_A > I_R$ .

Следует отметить, что ток  $I_V$ , идущий через вольтметр, существенно зависит от его внутреннего сопротивления и соотношения между  $R$  реостата и  $R_V$ . Это нетрудно показать.

Действительно, так как  $I_R R = I_V R_V$ , то  $I_V = I_R R / R_V$  и, следовательно,

$$I_A = I_R + I_V = I_R (1 + R/R_V). \quad (3)$$

Обычно хорошие вольтметры имеют большое внутреннее сопротивление, поэтому  $I_V$  очень мал. При  $R_V \gg R$  из соотношения (3) получим, что  $I_A \approx I_R$ , а, следовательно, величину  $R$  можно с достаточной степенью точности определить как

$$R' = U_V / I_A. \quad (4)$$

Если же нельзя пренебречь величиной  $R/R_V$  в соотношении (3), то при расчете истинного сопротивления участка цепи (в нашем случае сопротивления реостата  $R$ ) с помощью схемы, приведенной на рис. 7.9, надо учесть поправку на величину  $I_V = U_V / R_V$ :

$$R = U_R / I_R = U_V / (I_A - I_V) = U_V / (I_A - U_V / R_V), \quad (5)$$

причем  $R > R'$  (сравните выражения (4) и (5)).

Оценим относительную погрешность  $\varepsilon_{om}$  измерения сопротивления реостата по предложенной схеме:

$$\varepsilon_{om} = \Delta R / R = (R - R') / R = R / R_V.$$

Рассчитаем  $\varepsilon_{om}$  для трех конкретных вариантов значений сопротивления вольтметра и сопротивления реостата:  $\varepsilon_{om1} = 1\%$ ;  $\varepsilon_{om2} = 10\%$ ;  $\varepsilon_{om3} = 100\%$ .

**Задача 7.5.** Считая сопротивление амперметра бесконечно малым, определяют сопротивление реостата  $R$  по показаниям амперметра и вольтметра, включенных в схему, как показано на рис. 7.10. Найти относительную погрешность найденного сопротивления, если в действительности сопротивление

амперметра  $R_A$ . Задачу решить для  $R_A = 0,2$  Ом и  $R$ , равного:  
 1) 1 Ом, 2) 10 Ом, 3) 100 Ом.

### Анализ и решение

В этой задаче рассмотрен второй способ определения неизвестного сопротивления  $R$  участка цепи с помощью амперметра и вольтметра (первый способ описан в задаче 7.4). Так же, как и в первом случае, теоретически он основан на использовании закона Ома для участка цепи. Однако, в отличие от первого способа, приборы для измерения тока и напряжения включены так, как показано на рис. 7.10.

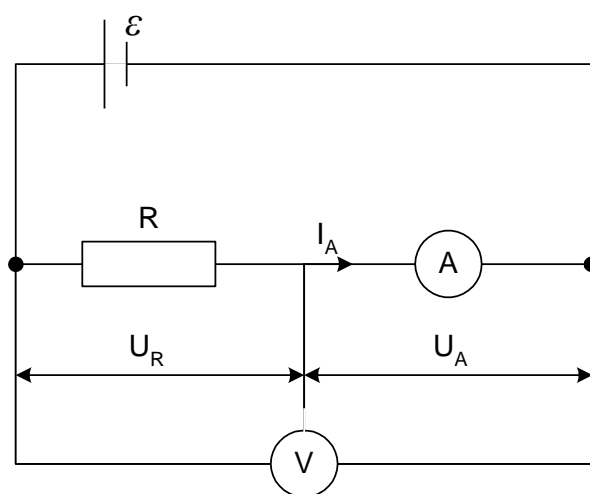


Рис. 7.10

Покажем, что и в этом случае расчет  $R$  реостата по показаниям амперметра и вольтметра ( $R' = \frac{U_V}{I_A}$ , где  $U_V$  и  $I_A$  – показания вольтметра и амперметра соответственно) содержит погрешность. Однако, в отличие от первого способа, эта погрешность существенно зависит не от сопротивления вольтметра, а от сопротивления амперметра  $R_A$ . Чем меньше различие между  $R_A$  и  $R$ , тем больше относительная погрешность измерения (именно поэтому амперметры стараются изготавливать с малым внутренним сопротивлением). Из закона Ома для участка цепи имеем, что истинное значение  $R$  участка цепи равно:

$$R = U_R / I_R. \quad (1)$$

Из схемы (рис. 7.10) видно, что если  $R$  и  $R_A$  включены последовательно, то  $U_V = U_R + U_A = U_R + I_A R_A$ , а  $I_R = I_A$ . Тогда можно записать, что истинное значение сопротивления  $R$  реостата равно:

$$R = (U_V - I_A R_A) / I_A = R' - R_A. \quad (2)$$

Заметим, что  $R < R'$ , т.е. второй метод дает завышенный результат.

Рассчитаем относительную погрешность измерения сопротивления реостата:

$$\varepsilon_{om} = \frac{\Delta R}{R} = \frac{R - R'}{R} = \frac{R_A}{R}.$$

Рассчитаем  $\varepsilon_{om}$  для трех конкретных вариантов значений  $R_A$  и  $R$ .

Получим:  $\varepsilon_{om1} = 20\%$ ;  $\varepsilon_{om2} = 2\%$ ;  $\varepsilon_{om3} = 0,2\%$ .

**Задача 7.6.** Гальванический элемент с электродвижущей силой 1,1 В и внутренним сопротивлением 1 Ом замкнут на внешнее сопротивление 9 Ом. Найти: 1) ток в цепи, 2) падение потенциала во внешней цепи, 3) падение потенциала внутри элемента.

### Анализ и решение

В случае замкнутой электрической цепи (рис. 7.11) силу тока определяют по закону Ома для полной цепи:

$$I = \varepsilon / (R + r), \quad (1)$$

где  $\varepsilon$  – ЭДС источника тока;

$R$  и  $r$  – сопротивления внешнего и внутреннего участков цепи.

В задачах обычно считают, что у источников тока  $\varepsilon = const$  и  $r = const$ . Падение потенциала во внешней цепи (равное напряжению на зажимах источника тока) получают из выражения (1):

$$U_R = I \cdot R = \varepsilon - I \cdot r, \quad (2)$$

а падение потенциала внутри элемента:

$$U_r = I \cdot r. \quad (3)$$

Закон Ома для полной цепи полезно проиллюстрировать графически. Для

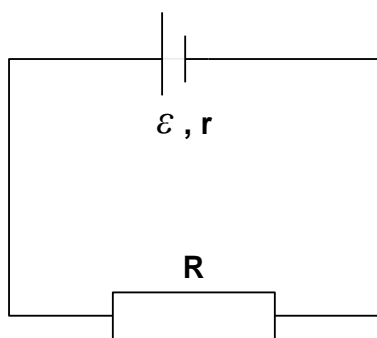


Рис. 7.11

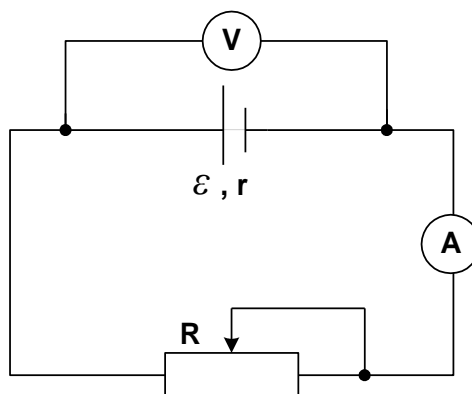


Рис. 7.12

этого будем считать, что внешнее сопротивление представляет собой реостат, т.е. его сопротивление  $R$  может изменяться от нуля до  $R \gg r$ , а для измерения  $I$  и  $U$  во внешней цепи схема снабжена амперметром и вольтметром (рис. 7.12).

На рис. 7.13. представлен график зависимости напряжения  $U$  во внешней цепи от тока  $I$  в ней. При  $R = 0$  в цепи течет ток короткого замыкания, равный  $I_{кз} = \varepsilon / r$ .

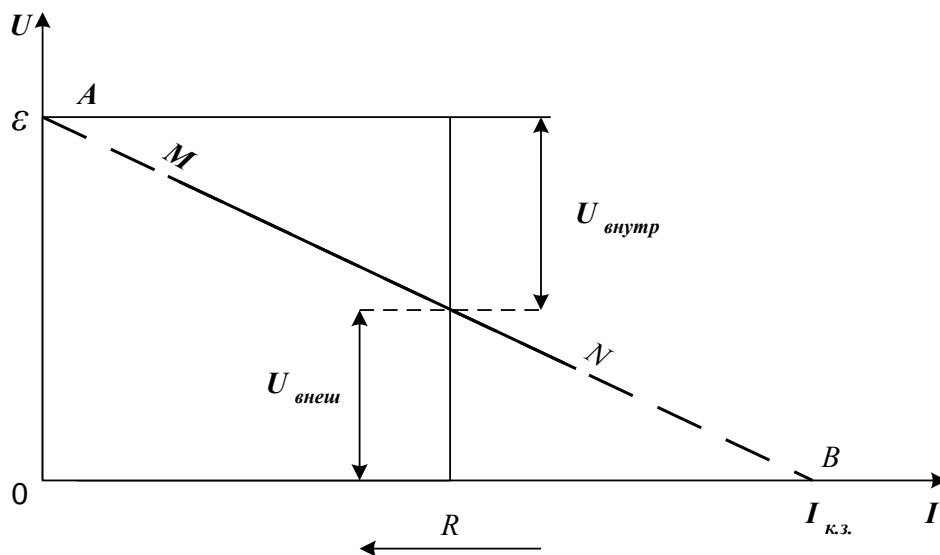


Рис. 7.13

При увеличении сопротивления внешней цепи сила тока уменьшается (см. (1)), а напряжение на внешнем участке цепи  $U_{внеш}$  увеличивается. Зависимость  $U(I)$  – линейная:  $U = I R$ . Внешнее напряжение равно ординате под прямой  $MN$ , а падение напряжения внутри источника  $U_{внутр}$  равно отрезку над прямой  $MN$  до прямой  $\varepsilon = const$ . На рис. 7.13 видно, что с ростом силы тока  $I$  уменьшается внешнее падение напряжения  $U_{внеш}$ , а  $U_{внеш} + U_{внутр} = const$ . Если внешняя цепь разомкнута ( $R = \infty$ ), то сила тока  $I = 0$  и напряжение равно  $U_{внеш} = \varepsilon$  (точка  $A$ ). При коротком замыкании ( $R = 0$ ),  $U_{внеш} = 0$ ,  $I_{кз} = \varepsilon / r$  (точка  $B$ ). Подставляя в (1) и (2) числовые данные из условия задачи, получим:

$$I = 0,11 \text{ A}; U_R = 0,99 \text{ В}; U_r = 0,11 \text{ В}.$$

**Задача 7.7.** На рис. 7.14 дана зависимость полезной мощности от силы тока в цепи. По точкам этой кривой найти внутреннее сопротивление и ЭДС источника тока. Построить зависимость полной мощности и КПД данного источника тока от силы тока.

#### Анализ и решение

Как известно (см. (7.18)),

$$P_{полезн} = I \cdot U = I^2 R = \varepsilon^2 R / (R + r)^2, \quad (1)$$

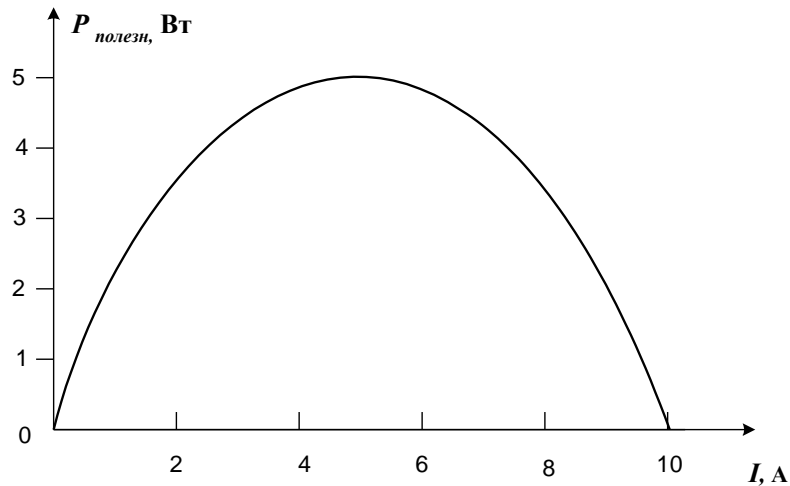


Рис.7.14

причем  $P_{\text{полезн}}$  имеет максимум при  $R = r$ , при этом

$$P_{\text{полезн}}^{\text{max}} = \varepsilon^2 / 4r. \quad (2)$$

Полезная мощность равна нулю при разомкнутой цепи ( $R = \infty$ ) и при коротком замыкании ( $R = 0$ ), причем ток короткого замыкания  $I_{\text{к.з.}}$  равен:

$$I_{\text{к.з.}} = \varepsilon / r. \quad (3)$$

Из графика имеем:  $I_{\text{к.з.}} = 10$  А, а  $P_{\text{полезн max}} = 5$  Вт. Подставляем эти значения в выражения (2) и (3) и получаем два уравнения с двумя неизвестными  $\varepsilon$  и  $r$ . Решая их относительно этих величин, найдем:

$$\varepsilon = 2 \text{ В}, r = 0,2 \text{ Ом}.$$

Зависимость полной мощности от силы тока ( $P_{\text{полн}} = I \cdot \varepsilon$ ) приведена на рис. 7.15.

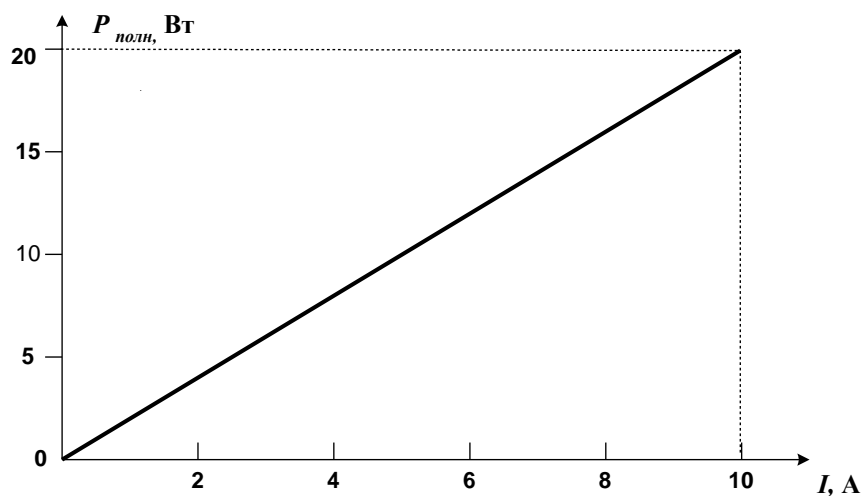


Рис. 7.15

Зависимость КПД ( $\eta = P_{\text{полезн}}/P_{\text{полн}}$ ) источника от силы тока  $I$  приведена на рис. 7.16.

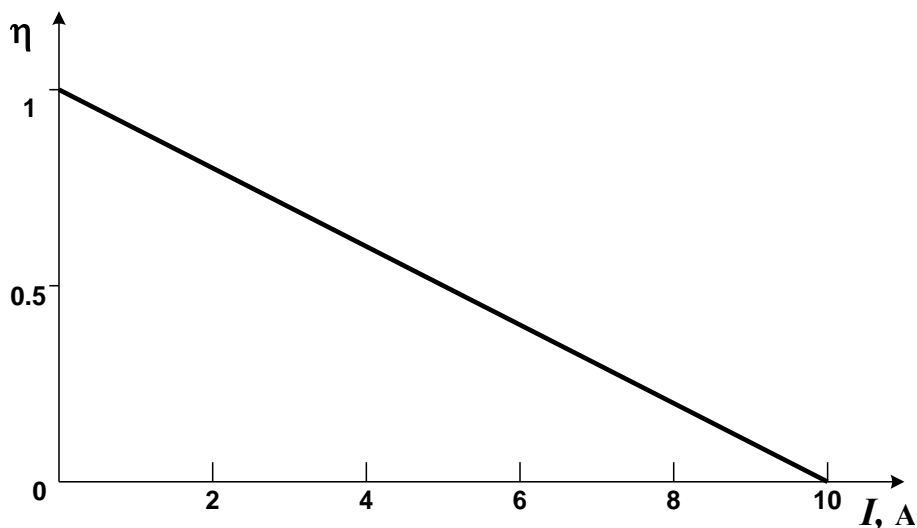


Рис. 7.16

**Задача 7.8.** На плитке мощностью 0,5 кВт стоит чайник, в который налит 1 л воды при температуре 16° С. Вода в чайнике закипела через 20 мин после включения плитки. Какое количество теплоты потеряно при этом нагревании воды?

**Анализ и решение**

Работа электрического тока  $A$  была затрачена на нагревание воды до кипения и потери на нагрев чайника, на теплообмен с атмосферой и т.д. Величину тепловых потерь  $Q_{\text{ном}}$  найдем из выражения:

$$Q_{\text{ном}} = A - Q, \quad (1)$$

где  $Q$  – количество теплоты, необходимое для того, чтобы вода в чайнике нагрелась до 100°С:

Учтем, что работа  $A$ , совершенная током за время  $t$ , находится из закона Джоуля-Ленца

$$A = P \cdot t, \quad (2)$$

а теплота  $Q$  равна:

$$Q = cm\Delta T = c\rho V\Delta T, \quad (3)$$

где  $c$  – удельная теплоемкость,  $\rho$  - плотность и  $V$  - объем воды;  $\Delta T = T_2 - T_1$ .

Подставив (2) и (3) в (1), рассчитаем  $Q_{\text{ном}}$ :

$$Q_{\text{ном}} = 0,5 \cdot 10^3 \cdot 20 \cdot 60 - 4,19 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3} \cdot 84 = 2,5 \cdot 10^5 \text{ Дж.}$$

## ТЕМА 8

### МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

#### Магнитные явления в природе. Вектор магнитной индукции

Магнитное взаимодействие в природе известно более 5000 лет. Природный магнит – это магнитный железняк или магнетит, состоящий на 30% из железа на 69% из кислорода.

Магнитное поле всегда возникает в пространстве, окружающем постоянные магниты и электрические токи. Оно обнаруживается по силовому воздействию на внесенные в него проводники с током или постоянные магниты. Название «магнитное поле» связывают с фактом ориентации магнитной стрелки под действием поля. Магнитное поле действует также на движущие заряды. Сила Лоренца, определяющая величину этого действия, равна:

$$\vec{F} = q[\vec{v}, \vec{B}], \quad (8.1)$$

где  $q$ ,  $\vec{v}$  – величина заряда и его скорость;

$\vec{B}$  – индукция магнитного поля.

Направление силы Лоренца определяется по «правилу левой руки»: если пальцы левой руки показывают направление скорости движения заряда  $\vec{v}$ , линии индукции магнитного поля  $\vec{B}$  входят в ладонь, то отогнутый большой палец показывает направление силы, действующей на положительный заряд  $q$ .

Таким образом, силовой характеристикой магнитного поля является вектор  $\vec{B}$ , аналогичный вектору напряженности  $\vec{E}$  для электрического поля. По историческим причинам  $\vec{B}$  называют вектором магнитной индукции. Единица измерения  $\vec{B}$  – 1 Тл.

В случае однородной и изотропной среды вектор магнитной индукции связан с вектором напряженности магнитного поля  $\vec{H}$  следующим соотношением:

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}, \quad (8.2)$$

где  $\mu_0$  – магнитная проницаемость вакуума;  $\mu$  – относительная магнитная проницаемость среды, показывающая, изменение магнитного поля в среде.

Из формулы (8.1) следует, что на покоящийся заряд магнитное поле не действует. В этом существенное отличие магнитного поля от электрического, поскольку индикатором электрического поля может быть как покоящийся, так и движущийся заряд.



## Закон Био – Савара – Лапласа

Проводник с постоянным током длиной  $dl$  создает вокруг себя магнитное поле (**произведение  $I d\vec{l}$  называется элементом тока**), вектор  $d\vec{B}$  которого в произвольной точке  $A$  (рис.8.1) может быть рассчитан следующим образом:

$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I [d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}, \quad (8.3)$$

где  $I$  – ток через проводник;  $d\vec{l}$  – вектор элементарной длины проводника,  $\vec{r}$  – расстояние от  $d\vec{l}$  до точки  $A$ .

Направление  $d\vec{B}$  перпендикулярно  $d\vec{l}$  и  $\vec{r}$ , т.е. плоскости, в которой они лежат. Это направление может быть найдено по «правилу буравчика»: направление вращения головки буравчика дает направление  $d\vec{B}$ , если поступательное движение буравчика соответствует направлению тока в проводе.

Закон Био – Савара – Лапласа и принцип суперпозиции позволяют довольно просто рассчитать конкретные поля.

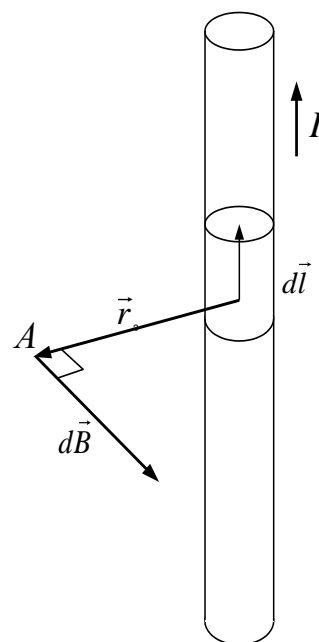


Рис.8.1

## Магнитное поле прямого тока

Найдем индукцию магнитного поля, создаваемую постоянным током  $I$ , текущему по бесконечно длинному прямому проводу в точке  $A$ , отстоящей на расстоянии  $R$  от оси провода (рис.8.2). Перейдем от векторной записи закона Био – Савара – Лапласа (8.3) к скалярной:

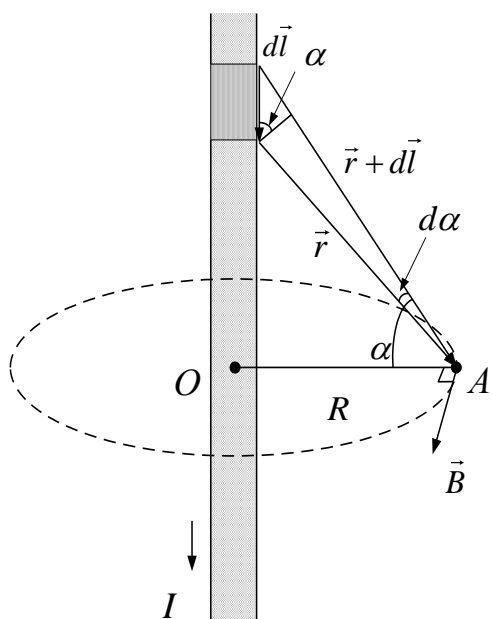


Рис.8.2

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl \cdot r \cdot \sin(90^\circ - \alpha)}{r^3}.$$

Поскольку

$$r = R/\cos\alpha \text{ и } dl \cos\alpha = r \cdot d\alpha \text{ или } dl = \frac{r \cdot d\alpha}{\cos\alpha},$$

то

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot I \frac{\cos\alpha \cdot d\alpha}{R}. \quad (8.4)$$

Полное значение индукции магнитного поля в точке  $A$  можно найти,

если просуммировать все значения  $dB$ , созданные различными элементами  $dl$  проводника с током  $I$ ; при этом  $\alpha$  будет изменяться от  $-\pi/2$  до  $\pi/2$ :

$$B = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \frac{\cos \alpha \cdot d\alpha}{R} = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi R}. \quad (8.5)$$

Из выражения (8.5) следует, что магнитное поле бесконечного прямого провода с током убывает обратно пропорционально  $R$ . Линии индукции магнитного поля  $\vec{B}$  являются концентрическими окружностями, а направление  $\vec{B}$  находится по правилу буравчика.

### Магнитное поле в центре кругового проводника с током

В этом случае все элементы тока ( $I dl$ ) перпендикулярны радиус-вектору  $\vec{R}$  (рис.8.3.), поэтому соотношение (8.3) в скалярной записи имеет вид:

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl}{R^2}. \quad (8.6)$$

Магнитное поле в центре кругового витка равно:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi R^2} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{\mu\mu_0 I}{2R}. \quad (8.7)$$

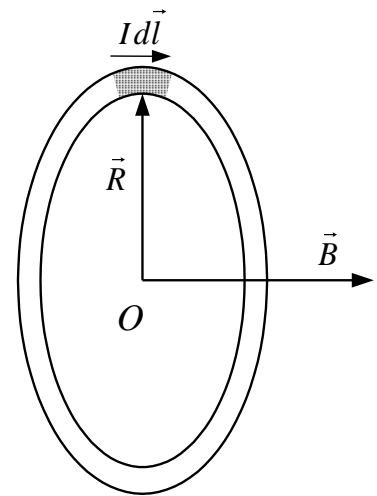


Рис.8.3

### Закон полного тока. Магнитное поле соленоида

Рассмотренные примеры показывают, что в отличие от электростатического поля, где силовые линии начинаются и кончаются на электрических зарядах, силовые линии магнитного поля замкнуты. Это хорошо видно на примере магнитного поля бесконечно длинного проводника с током.

В силу этого магнитное поле называется вихревым (электростатическое поле – потенциальным).

Ампер, исходя из вихревого характера магнитного поля, обобщил закономерности его в следующем соотношении:

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu\mu_0 \sum_i I_i, \quad (8.8)$$

где  $d\vec{l}$  – элемент длины произвольного замкнутого контура.

Это закон полного тока: циркуляция вектора индукции магнитного поля по замкнутому контуру длиной  $l$  равна произведению  $\mu\mu_0$  на алгебраическую сумму токов, охватываемых контуром интегрирования.

Закон полного тока (закон Ампера), подобно теореме Остроградского-Гаусса в электростатике, позволяет упростить вычисление  $\vec{B}$ .

Для примера вычислим  $\vec{B}$  прямого тока (рис.8.2). Контур интегрирования выберем по силовой линии, соответствующей окружности радиуса  $R$ :

$$\oint_l B dl = \mu\mu_0 I,$$

$$B \cdot 2\pi R = \mu\mu_0 I,$$

$$B = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{R}.$$

Последнее соотношение совпадает с (8.5).

Закон Ампера (8.8) позволяет существенно упростить расчет магнитного поля бесконечно длинного соленоида – катушки с током  $I$ , у которого магнитное поле сосредоточено внутри соленоида и однородно (рис.8.4).

Выберем контур интегрирования в виде прямоугольника со сторонами  $l$  и  $a$ . Так как  $a \perp B$ , то

$$\oint_l B dl = B l = \mu\mu_0 N I,$$

где  $N$  – число витков, охваченных контуром.

$$B = \mu\mu_0 n I, \quad (8.9)$$

где  $n = \frac{N}{l}$  – число витков, приходящихся на единицу длины соленоида.

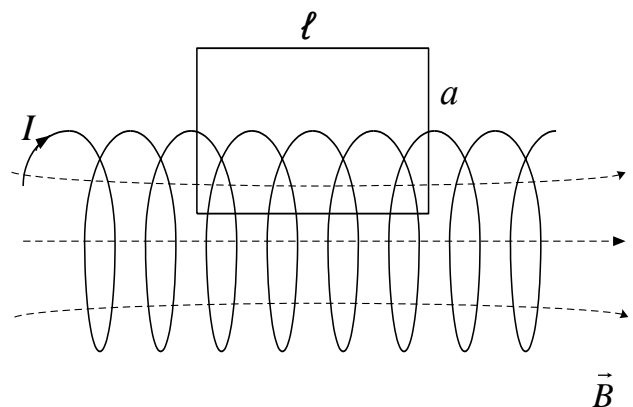


Рис.8.4

В реальном случае, когда длина соленоида  $L$  не является бесконечной, но радиус его витков  $R \ll L$ , магнитная индукция в центре соленоида равна:

$$B = \mu\mu_0 N I \frac{L}{2\sqrt{R^2 + (0,5L)^2}}, \quad (8.10)$$

а у края его

$$B = \mu\mu_0 N I \frac{L}{2\sqrt{R^2 + L^2}}, \quad (8.11)$$

т.е. почти вдвое меньше. Заметное изменение индукции магнитного поля происходит лишь вблизи концов катушки. При приближенных расчетах вместо выражения (8.11) часто применяют (8.10).

## Движение заряда в магнитном поле. Сила Лоренца

Формула (8.1) показывает, что магнитное поле действует только на движущийся заряд. Если в данной точке пространства есть не только магнитное, но и электрическое поле, то совместное действие их на движущийся заряд  $q$  определяется электрической и магнитной составляющей силы Лоренца:

$$\vec{F}_л = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}]. \quad (8.12)$$

Рассмотрим движение заряженной частицы в однородном магнитном поле  $\vec{B}$ . Если скорость заряда  $\vec{v} \perp \vec{B}$ , он будет двигаться по окружности радиуса  $R$ , поскольку сила Лоренца будет создавать центростремительное ускорение (рис. 8.5):

$$ma_{цс} = F_л, \quad (8.13)$$

или

$$\frac{mv^2}{R} = qvB.$$

Откуда

$$R = \frac{mv}{qB}. \quad (8.14)$$

Радиус окружности  $R$  зависит от  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$ .

Таким образом, заряженная частица при  $\vec{v} \perp \vec{B}$  будет вращаться в магнитном поле с угловой скоростью  $\omega = v/R$  (циклотронной частотой):

$$\omega = \frac{qB}{m}. \quad (8.15)$$

Из выражения (8.15) видно, что частота вращения для каждого заряда определяется отношением  $q/m$  и  $\vec{B}$  и не зависит от  $\vec{v}$ .

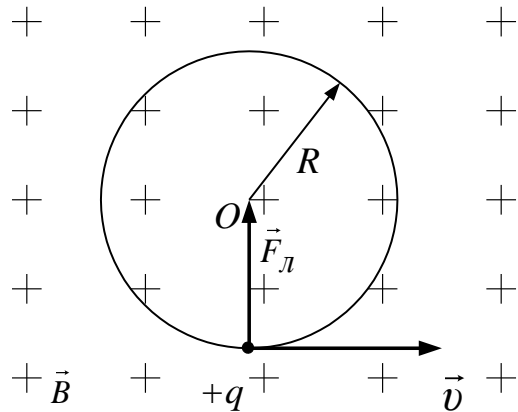


Рис.8.5

### Эффект Холла

Силой Лоренца обуславливается очень важный эффект, открытый Холлом в 1879 г. и носящий его имя.

Пусть в пластине из проводящего материала течет ток  $I$ , причем пластина находится в магнитном поле с постоянной индукцией  $\vec{B}$  (рис.8.6) ширина пластины  $b$ , а толщина  $a$ .

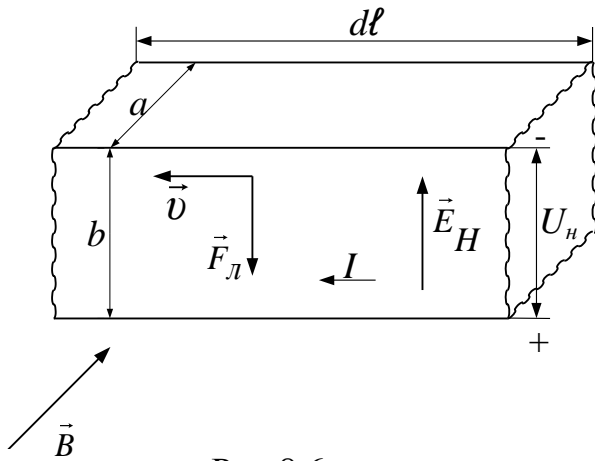


Рис.8.6

Под действием силы Лоренца положительные заряды отклоняются книзу, вследствие чего в пластине установится поперечное (холловское) поле напряженностью  $\vec{E}_H$ , показанное на рисунке. Действие силы Лоренца и поперечного поля  $\vec{E}_H$  противоположны, поэтому накопление заряда на боковых сторонах пластинки прекратится, когда

$$qE_H = qvB. \quad (8.16)$$

Отсюда напряженность поперечного поля равна:

$$E_H = vB. \quad (8.17)$$

Поперечная разность потенциалов:

$$U_H = bE_H = bvB. \quad (8.18)$$

Поскольку ток в проводнике создают электроны ( $q=e$ )  $I = envab$ , то (8.18) может быть переписано в виде:

$$U_H = \frac{1}{en} \cdot \frac{IB}{a}. \quad (8.19)$$

Таким образом, по величине поперечной разности потенциалов, зная  $I$  и  $B$ , можно определить концентрацию  $n$  и знак свободных носителей заряда. Величина  $I/en$  получила название постоянной Холла:

$$R_H = \frac{1}{en} = \frac{U_H \cdot a}{I \cdot B}. \quad (8.20)$$

Если по сопротивлению образца вычислить его электропроводность  $\sigma$  (см.(8.5)), то зная  $R_H$ , можно определить подвижность носителей заряда:

$$R_H \cdot \sigma = \frac{1}{en} \cdot e \cdot n \cdot \mu = \mu. \quad (8.21)$$

Явление возникновения холловской разности потенциалов используется в таких источниках тока, как магнито-гидродинамические (МГД) генераторы. В них через пространство с постоянным магнитным полем  $\vec{B}$  пропускается с большой скоростью  $\vec{v}$  ( $\vec{v} \perp \vec{B}$ ) газ, разогретый до состояния плазмы (ионизированные атомы и свободные электроны), и с поперечных потоку газа электродов снимается холловская ЭДС.

### Сила Ампера

Сила Лоренца действует на каждый движущийся заряд. Так как электрический ток является направленным движением электрических зарядов,

то на проводник с током в магнитном поле действует сила, которую называют силой Ампера.

Рассмотрим элемент провода длиной  $dl$  (рис.8.6) и сечением  $S=a \cdot b$ , в котором течет ток  $I$ , создаваемый зарядами  $q$ , движущимися со средней скоростью  $\vec{v}$ . Суммарная сила  $d\vec{F}$ , действующая на этот элемент  $dl$  проводника с током в магнитном поле  $\vec{B}$  равна

$$d\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = (\sum_i q_i) [\vec{v}, \vec{B}].$$

Тогда, введя вектор  $d\vec{l}$ , равный элементу  $dl$  и сонаправленный с вектором  $\vec{v}$ , и учтя, что сумма зарядов в элементе  $dl$  равна  $\sum_i q_i = qnSdl$ , а ток в проводнике  $I = qnSv$ , получим

$$d\vec{F} = I [d\vec{l}, \vec{B}]. \quad (8.22)$$

Полученный закон (8.22) был установлен Ампером. Он позволяет найти силу  $d\vec{F}$ , действующую на неподвижный элемент тока  $I d\vec{l}$  в магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$ .

Действие силы Ампера на проводник с током широко используется в работе различных механизмов, в частности, в электроизмерительных приборах и электродвигателях.

### Закон электромагнитной индукции. Самоиндукция

В 1831 г. М.Фарадей показал, что меняющееся во времени магнитное поле создает меняющееся электрическое поле. При этом циркуляция напряженности  $\vec{E}$  этого поля, взятая по длине  $l$  исследуемого контура (рис.8.7), определяется скоростью изменения магнитного потока  $\Phi = \int_s \vec{B} d\vec{S}$ , пронизывающего поверхность  $S$ , опирающуюся на контур  $l$ ; и равна ЭДС электромагнитной индукции  $\varepsilon_u$ , возникающей в этом контуре:

$$\varepsilon_u = \oint_l \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_s \vec{B} d\vec{S}. \quad (8.23)$$

Знак минус определяется правилом Ленца, гласящим, что индукционный ток всегда направлен так, чтобы своим магнитным полем препятствовать тому изменению магнитного поля, которое его вызвало.

Явление электромагнитной индукции используется для получения электрического тока в электрогенераторах на электростанциях.

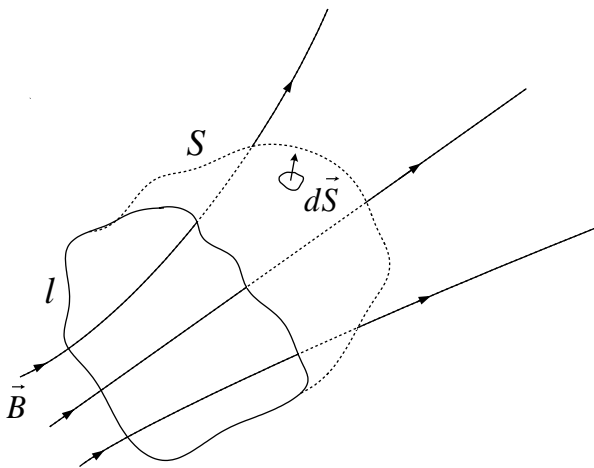


Рис. 8.7

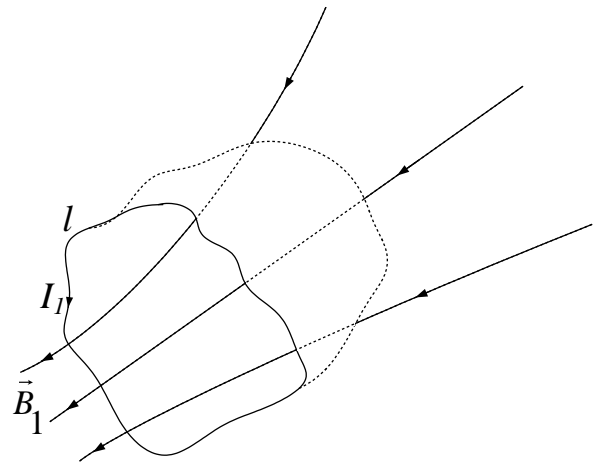


Рис. 8.8

Очевидно, что магнитный поток, пронизывающий поверхность  $S$ , опирающуюся на контур  $l$  (рис.8.8), может быть создан током  $I_1$ , протекающим по этому контуру. Причем, этот поток  $\Phi_1$  пропорционален  $I_1$ , а коэффициент пропорциональности между ними называется индуктивностью и обозначается буквой  $L$ :

$$\Phi_1 = L \cdot I_1. \quad (8.24)$$

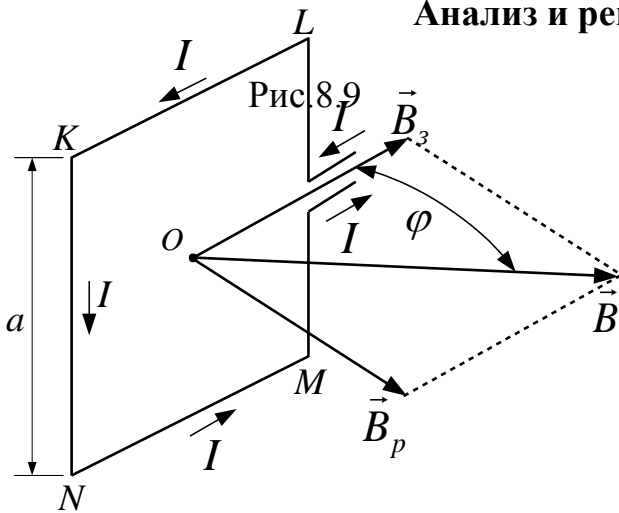
При этом, любое изменение силы тока  $I_1$  вызывает изменение магнитного потока  $\Phi_1$  через поверхность  $S$  и, как следствие этого, появление в контуре ЭДС индукции. Поскольку появление этой ЭДС в контуре обусловлено изменением силы тока в самом контуре, то возникающая ЭДС индукции называется ЭДС самоиндукции  $\varepsilon_{cu}$ , а само явление называется явлением самоиндукции. Естественно, что  $\varepsilon_{cu}$  равна

$$\varepsilon_{cu} = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -L \frac{dI_1}{dt}. \quad (8.25)$$

### Примеры решения задач

**Задача 8.1.** На квадратную рамку со стороной  $a = 15$  см, установленную вертикально, намотано  $N = 20$  витков проволоки, по которой идет ток  $I = 0,2$  А. Рамка установлена вертикально в плоскости магнитного меридиана, и в центре помещена магнитная стрелка, вращающаяся вокруг вертикальной оси. Определите угол отклонения стрелки от плоскости рамки, если горизонтальная составляющая магнитного поля Земли  $B_3 = 3 \cdot 10^{-5}$  Тл.

### Анализ и решение



При прохождении тока  $I$  по рамке магнитная стрелка свободно вращается вокруг вертикальной оси и устанавливается параллельно вектору индукции магнитного поля  $\vec{B}$ . Вектор  $\vec{B}$  является векторной суммой магнитного поля Земли  $\vec{B}_3$  и магнитного поля рамки  $\vec{B}_p$ . Эти два поля ( $\vec{B}_3$

и  $\vec{B}_p$ ) перпендикулярны друг к другу (рис. 8.9). Поэтому  $\operatorname{tg} \varphi = B_p / B_3$ . Величина  $B_3$  нам известна, а  $B_p$  находится, используя принцип суперпозиции:

$$\vec{B}_p = \vec{B}_{KL} + \vec{B}_{LM} + \vec{B}_{MN} + \vec{B}_{NK}, \quad (1)$$

где  $\vec{B}_{KL}, \vec{B}_{LM}, \vec{B}_{MN}, \vec{B}_{NK}$  – векторы магнитной индукции, созданные сторонами рамки. Эти 4 вектора параллельны друг другу, следовательно, векторную сумму можно заменить алгебраической. Кроме того, из симметрии задачи вытекает равенство этих векторов, и можно записать:

$$B_p = 4B_{KL}. \quad (2)$$

Величину  $B_{KL}$  можно вычислить, используя закон Био – Савара – Лапласа (рис. 8.10).

$$B_{KL} = \frac{\mu_0 NI}{4\pi} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{\cos \beta dx}{r^2}. \quad (3)$$

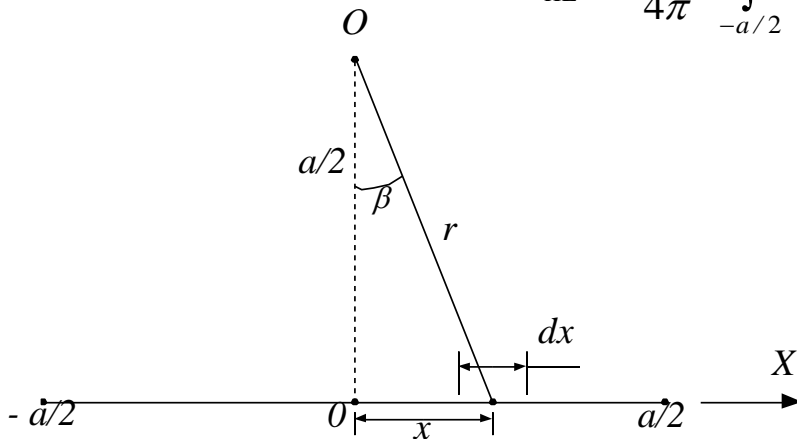


Рис.8.10

Подставляя в это выражение

$$\cos \beta = a / 2r$$

и заменяя величину  $r$  с помощью соотношения

$$r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + x^2},$$

сводим получившийся интеграл к табличному и получаем:

$$B_{KL} = \frac{\sqrt{2} \mu_0 NI}{2\pi a}. \quad (4)$$



Следовательно,

$$B_p = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 NI}{\pi a}. \quad (5)$$

В итоге получаем ответ:

$$\varphi = \arctg \frac{B_p}{B_3} = \arctg \frac{2\sqrt{2}\mu_0 NI}{\pi a B_3} = 35^\circ. \quad (6)$$

**Задача 8.2.** Найти распределение напряженности магнитного поля вдоль оси соленоида, длина которого равна  $L$ , диаметр –  $D$ , имеющего  $N$  витков. Сила тока, текущего по соленоиду, равна  $I$ .

### Анализ и решение

Найти распределение магнитной индукции – значит определить зависимость  $B$  от координаты, отсчитанной вдоль оси соленоида. Эта координата обозначается через  $x$  (рис. 8.11).

За начало отсчета этой координаты выбирается один из концов соленоида. Согласно принципу суперпозиции, поле в точке с координатой  $x$  будет равно векторной сумме магнитных полей, создаваемых каждым из  $N$  витков соленоида. Представим соленоид длиной  $L$  и радиуса  $R$  как совокупность отдельных круговых соосных витков тока. Величина магнитной индукции одного витка равна:

$$B_1 = \frac{\mu_0 IR}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0 IR}{4\pi(R^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (1)$$

где  $r = \sqrt{R^2 + z^2}$ ,  $R = D/2$ ,  $z$  – расстояние от плоскости витка до точки  $x$ .

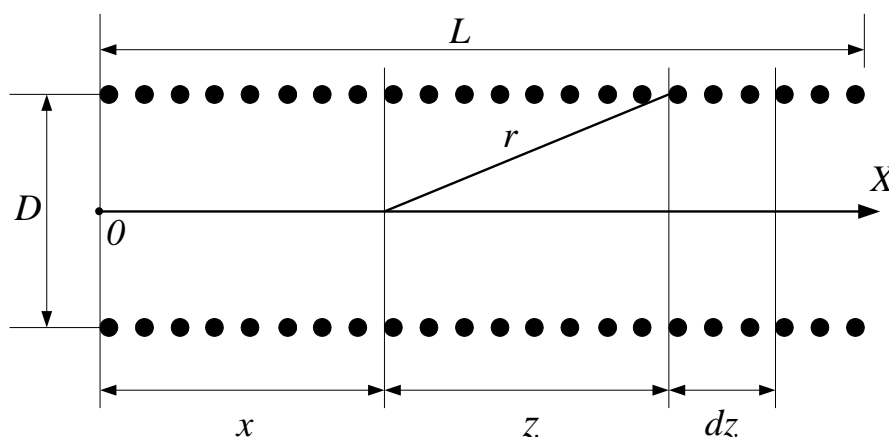


Рис.8.11

Так как вектор  $\vec{B}_1$  направлен по оси соленоида, то векторную сумму можно заменить на алгебраическую. Величина магнитной индукции витков, расположенных на расстоянии от  $z$  до  $z + dz$  от точки  $x$ , будет равна:

$$dB = \frac{\mu_0 IR}{4\pi(R^2 + z^2)^{3/2}} \cdot \frac{N dz}{L}. \quad (2)$$

Интегрируя это выражение в пределах от  $-x$  до  $L-x$  и используя табличное значение интеграла, получаем:

$$B = \frac{\mu_0 IRN}{4\pi L} \cdot \int_{-x}^{L-x} \frac{dz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 IN}{2L} \left[ \frac{L-x}{\sqrt{R^2 + (L-x)^2}} + \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right]. \quad (3)$$

**Задача 8.3.** Круговой проволочный виток площадью  $100 \text{ см}^2$  и сопротивлением  $100 \text{ Ом}$  находится в однородном магнитном поле, индукция которого  $1 \text{ Тл}$ . Плоскость витка перпендикулярна направлению магнитного поля. Чему будет равно среднее значение ЭДС индукции, возникающей в витке при выключении поля в течение  $0,01 \text{ с}$ ? Какой заряд пройдет при этом через виток?

### Анализ и решение

По закону электромагнитной индукции

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (1)$$

Так как в задаче определяется только абсолютные величины, то знак  $-$  можно в дальнейшем опустить. Величина потока

$$\Phi = BS. \quad (2)$$

Следовательно, средняя скорость изменения потока по модулю равна:

$$\left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = \frac{BS}{\tau},$$

и искомое значение величины ЭДС:

$$\mathcal{E} = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = \frac{BS}{\tau}. \quad (3)$$

Заряд  $q$ , прошедший через виток, по определению равен:

$$q = \int_0^{\infty} I dt. \quad (4)$$

Воспользуемся законом Ома  $I = \mathcal{E}/R$  и из закона электромагнитной индукции найдем:

$$q = -\frac{1}{R} \int_0^{\infty} \frac{d\Phi}{dt} dt = \frac{\Phi}{R} = \frac{BS}{R}, \quad (5)$$

так как в конечном состоянии магнитное поле, а значит, и магнитный поток отсутствуют.

Численные значения:

$$\mathcal{E} = \frac{1 \cdot 0,01}{0,01} = 1 \text{ В.}$$

$$q = \frac{1 \cdot 0,01}{100} = 10 \cdot 10^{-4} \text{ Кл.}$$

**Задача 8.4.** Через сечение  $S = ab$  алюминиевой пластинки ( $b$  – ширине пластинки,  $a$  – толщина пластинки) пропускается ток  $I = 5$  А (см. рис.8.6). Пластика помещена в магнитное поле, перпендикулярная ребру  $a$  и направлению тока. Определить возникающую при этом холловскую разность потенциалов, если индукция магнитного поля  $B = 0,5$  Тл, а толщина пластинки  $a = 0,1$  мм. Концентрацию электронов проводимости считать равной концентрации атомов.

#### Анализ и решение

Для решения задачи необходимы значения плотности алюминия  $\rho$  и его атомного веса  $\mu$ , которые есть в справочных таблицах. Используя результат (8.20), имеем:

$$U_n = R \frac{IB}{a}, \quad (1)$$

где постоянная Холла равна:

$$R = \frac{1}{ne}. \quad (2)$$

Таким образом, решение задачи сводится к определению концентрации носителей заряда (электронов), которая равна по условию задачи концентрации атомов алюминия. Если в одном киломоле содержится  $N_a$  атомов вещества, то в единице объема содержится:

$$n = N_a \frac{\rho}{\mu_A} \quad (3)$$

атомов, следовательно:

$$U_n = \frac{\mu IB}{e N_a \rho a}. \quad (4)$$

Численное значение:

$$U_n = \frac{26 \cdot 6 \cdot 0,5}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 6,02 \cdot 10^{26} \cdot 2,6 \cdot 10^3 \cdot 10^{-4}} = 2,7 \cdot 10^{-6} \text{ В.}$$

**Задача 8.5.** Определить концентрацию электронов в полупроводниковом образце, помещенном в магнитное поле индукции  $B = 0,8$  Тл, если по образцу идет электрический ток  $I = 10^{-4}$  А, а поперечная (холловская) разность потенциалов  $U_n = 10^{-3}$  В. Толщина образца  $a = 1$  мм (см. рис.8.6).

### Анализ и решение

Для решения задачи воспользуемся соотношением (8.19):

$$\frac{I}{en} = \frac{U_n a}{IB},$$

откуда

$$n = \frac{IB}{eU_n a}.$$

Численное значение концентрации равно:

$$n = 5 \cdot 10^{-20} \text{ м}^{-3}.$$

**Задача 8.6.** Найдите силу, действующую на алюминиевую пластину в задаче 8.4, если ее длина  $l = 10$  см.

### Анализ и решение

На проводник с током  $I$  в магнитном поле  $\vec{B}$  действует сила Ампера (см.(8.22)). Поэтому искомая сила равна

$$F = \int_l dF = \int_l IBdl = IBl.$$

Численное значение силы равно:

$$F = 5 \cdot 0,5 \cdot 0,1 = 0,25 \text{ Н}.$$

**Задача 8.7.** Проволочная квадратная рамка может вращаться относительно горизонтальной оси  $OX$  (см. рис.8.12). Рамка находится в однородном магнитном поле, направленном вертикально вверх. Когда по проводу течет ток  $I$ , рамка отклоняется на угол  $\alpha$ . Определите индукцию магнитного поля, если длина и масса стороны рамки равны  $a$  и  $m$ , соответственно.

### Анализ и решение.

Рамка, повернувшись при включении на угол  $\alpha$ , остается в равновесии (рис.8.12). Следовательно, сумма моментов сил, действующих на нее, равна нулю. Проводник с током находится в магнитном поле и в поле тяготения Земли, поэтому на каждую из сторон рамки действует сила Ампера и сила тяжести.

Рассмотрим силы, действующие на стороны рамки. Сторона  $AB$  закреплена на оси. Поэтому силы

Ампера и тяжести компенсируются силой реакции оси. Силы Ампера,

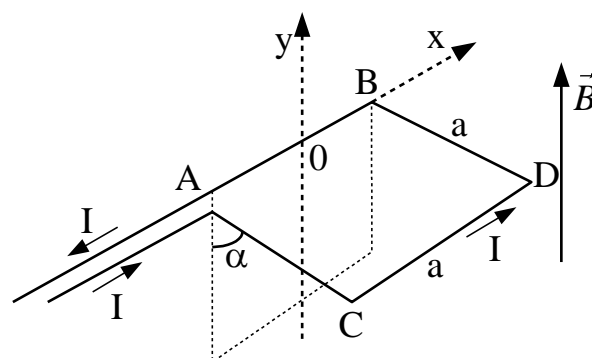


Рис. 8.12

действующие на стороны рамки AC и BD, направлены горизонтально вдоль оси OX, но в противоположные направления, стремясь «разорвать» рамку, и компенсируются силами упругости рамки, а моменты этих сил – осью вращения.

Сила Ампера, действующая на сторону CD, направлена горизонтально вправо и создает момент силы относительно оси OX, равный

$$\vec{M}_1 = [\vec{r}_1, \vec{F}_A], \quad (1)$$

где  $\vec{r}_1$  - радиус – вектор, проведенный от оси вращения OX, до точки приложения силы  $\vec{F}_A$  - середины стержня CD ( $|\vec{r}_1| = a$ );  $\vec{F}_A$  - сила Ампера, причем  $|\vec{F}_A| = IaB$  (см. задачу 8.6).

Тогда проекция  $\vec{M}_1$  на ось OX равна:

$$|\vec{M}_1| = |\vec{r}_1| \cdot |\vec{F}_A| \cdot \sin \varphi = aIaB \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = Ia^2B \cdot \cos \alpha. \quad (2)$$

Сила тяжести  $\vec{P}$  сторон AC, CD, и BD, равная  $3mg$ , приложена к их центру масс и создает вращающий момент:

$$\vec{M}_2 = [\vec{r}_2, \vec{P}], \quad (3)$$

где  $\vec{r}_2$  - радиус – вектор, проведенный от оси вращения OX, до центра масс.

В выбранной системе координат найдем положение центра масс сторон, когда ток отсутствует и рамка висит на оси вертикально вниз. Координаты центра масс равны:

$$x_{цм} = 0 \text{ и } y_{цм} = \frac{2m \frac{a}{2} + ma}{3m} = \frac{2}{3}a. \quad (4)$$

Тогда  $|\vec{r}_2| = \sqrt{x_{цм}^2 + y_{цм}^2} = \frac{2}{3}a$ , а проекция момента  $\vec{M}_2$  на ось OX равна:

$$|\vec{M}_2| = |\vec{r}_2| |\vec{P}| \sin \varphi_2 = -\frac{2}{3}a3mg \sin \alpha = -2amg \sin \alpha. \quad (5)$$

Из условия  $\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = 0$  (рамка неподвижна) следует, что

$$Ia^2B \cos \alpha - 2amg \sin \alpha = 0, \quad (6)$$

Откуда, используя (2) и (5),

$$B = \frac{2mg}{Ia} \operatorname{tg} \alpha. \quad (7)$$

**Задача 8.8.** На рис.8.13 представлена цепь с источником постоянного тока  $\varepsilon$ , катушкой индуктивности  $L$  резистором  $R$  и ключом  $K$ . Рассмотрите процесс установления тока в этой цепи после замыкания ключа и нарисуйте зависимость тока в цепи от времени.

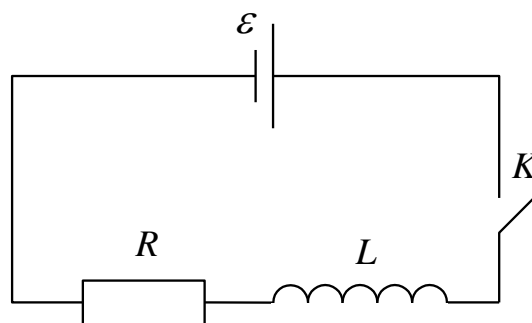


Рис.8.13

### Анализ и решение

Пусть в момент времени  $t=0$  цепь замыкается и в момент времени  $t$  в цепи течет ток  $I$ . За время  $dt$  он изменится на  $dI$ . При этом источник совершит элементарную работу, равную

$$\varepsilon Idt = RI^2 dt + LI dI . \quad (1)$$

Разделим обе части уравнения (1) на  $Idt$  и введем новую переменную  $y = I - \varepsilon/R$ . Тогда уравнение (1) примет вид:

$$Ry + L \frac{dy}{dt} = 0 .$$

Разделяя переменные и интегрируя в пределах от  $0$  до  $t$ , получим

$$y = y_0 \exp(-t/\tau), \quad \tau = L/R .$$

Так как при  $t=0$   $I=0$ , то окончательно для  $I$  имеем

$$I = I_m [1 - \exp(-t/\tau)] , \quad (2)$$

где  $I_m = \varepsilon/R$ .

Временная зависимость  $I(t)$  приведена на рис.8.14.

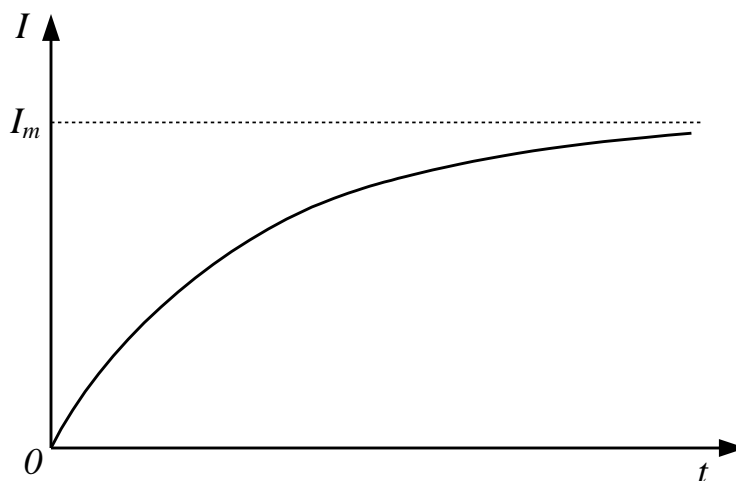


Рис.8.14

**Задача 8.9.** В однородном магнитном поле с индукцией  $B = 0,124$  Тл вращается квадратная рамка (см. рис.8.15) со стороной  $a = 40$  см, состоящая из  $N = 50$  витков медного провода с площадью поперечного сечения  $S_{np} = 1$  мм<sup>2</sup>. Найти  $\varepsilon$  и внутреннее сопротивление полученного на основе вращающейся рамки источника тока, если частота вращения рамки  $\nu = 50$  Гц и удельное сопротивление меди  $\rho = 1,6 \cdot 10^{-8}$  Ом·м.

**Анализ и решение.**

ЭДС электромагнитной индукции  $\varepsilon_u$  возникает в контуре, когда магнитный поток  $\Phi$  пронизывающий поверхность  $S$ , охватываемую этим контуром, изменяется во времени. Величина  $\varepsilon_u$  равна (см.(8.23)):

$$\varepsilon_u = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (1)$$

В нашем случае величина магнитного потока равна:

$$\Phi = \vec{B}\vec{S} = B \cdot S \cdot \cos \varphi, \quad (2)$$

где  $S = a^2 N$  – площадь  $N$  витков рамки, а  $\varphi = \omega t = 2\pi\nu t$ .

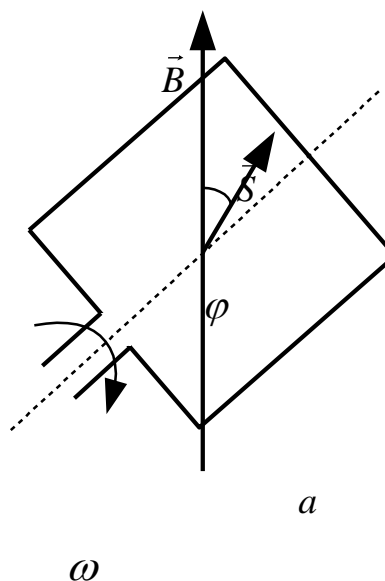


Рис. 8.15

Тогда  $\Phi = Ba^2 N \cos \omega t$  и

$$\varepsilon_u = -\frac{d}{dt} (Ba^2 N \cos \omega t) = \omega Ba^2 N \sin \omega t. \quad (3)$$

$\varepsilon_u$  изменяется по синусоидальному закону с частотой  $\nu = 50$  Гц. Таким образом, вращающаяся рамка является источником переменного тока с  $\varepsilon = \varepsilon_u$  и внутренним сопротивлением, равным сопротивлению проводов рамки.

Тогда

$$r_{вн} = \rho \frac{l}{S_{np}} = \rho \frac{4aN}{S_{np}}. \quad (4)$$

Подставив в (3) и (4) численные значения, получим:

$$\varepsilon = \varepsilon_u = 311 \sin(314 \cdot t) \text{ В}, \quad r_{вн} = 1,28 \text{ Ом}.$$

## ТЕМА 9

### КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

#### Переменный ток. Квазистационарные токи.

Процессы, временем распространения которых в данной электрической цепи можно пренебречь по сравнению со временем изменения исследуемой физической величины (тока, напряжения), получили название квазистационарных.

**Квазистационарный ток** – это электрический ток, меняющийся настолько медленно, что магнитное поле, связанное с ним, в каждый момент времени может быть принято равным магнитному полю стационарного тока, аналогично распределенному в пространстве. Электрическое поле квазистационарного тока может быть принято одинаковым с электрическим полем, соответствующим данному мгновенному распределению зарядов.

В этом разделе рассматриваются процессы в электрических цепях, питаемых от источников, ЭДС которых меняется по гармоническому закону:

$$E = E_m \cdot \cos \omega t, \quad (9.1)$$

где  $E_m$  – максимальное значение (амплитуда) ЭДС;  $\omega = 2\pi/T$  – частота.

Поскольку мы рассматриваем квазистационарные токи, то к мгновенным значениям всех электрических величин могут применяться законы постоянного тока.

#### Эффективные значения тока и напряжения.

Величину переменного тока можно характеризовать наибольшим значением, которого ток достигает в течение периода. Эту величину называют **амплитудным значением тока**. Если речь идет о напряжении, то говорят об амплитудном значении напряжения. Но за период амплитуда тока дважды достигает максимальных значений, причем противоположного направления. Что же принимать за величину переменного тока, напряжения? Как сопоставлять переменный и постоянный ток? Условились сопоставлять переменный и постоянный ток по их тепловому действию. Рассчитаем среднее значение мощности переменного тока за период, полагая, что

$$i = i_m \cos \omega t \quad \text{и} \quad u = u_m \cos \omega t \quad (9.2)$$

и что справедлив закон Джоуля - Ленца:

$$P_{\sim} = i \cdot u = i^2 \cdot R, \quad (9.3)$$



$$P_{\sim} = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 R dt = \frac{1}{T} \int_0^T i_m^2 R \cos^2 \omega t dt = \frac{1}{2} i_m^2 R. \quad (9.4)$$

Поскольку мощность в цепи постоянного тока  $P = I^2 R$ , то сравнивая это соотношение с (9.4), приняли величину  $I_{\text{эфф}} = i_m / \sqrt{2}$  называть действующим, или эффективным, значением силы переменного тока.

Также определяется эффективное значение переменного напряжения:  $U_{\text{эфф}} = u_m / \sqrt{2}$ .

Так, например, напряжение 220 В обычной осветительной сети переменного тока является именно эффективным напряжением; соответствующее максимальное амплитудное значение близко к 311 В.

Приведенные расчеты можно проиллюстрировать графически. На рис. 9.1 представлены графики  $P_{\sim}$  и  $P$  для одного и того же сопротивления (резистора). Количество тепла, выделившееся на резисторе за время  $T$ , одинаково для постоянного и переменного тока, так как площади под прямой  $ab$  и кривой  $c$  одинаковы.

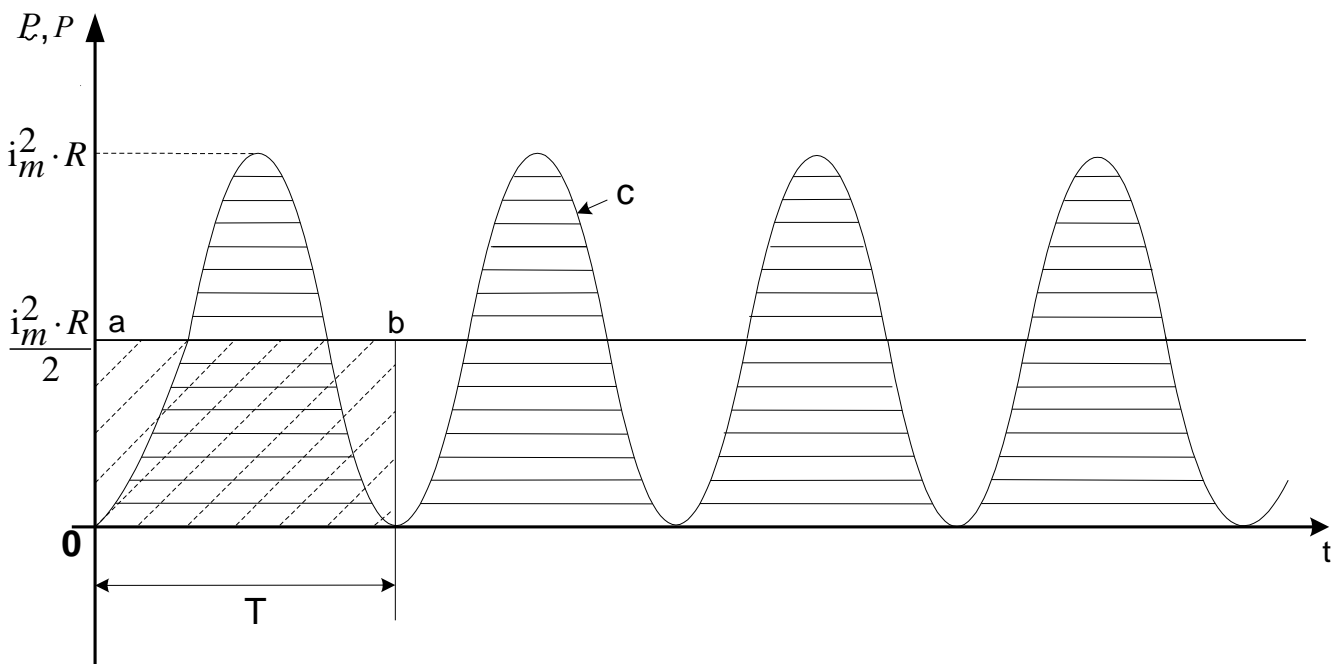


Рис. 9.1

## Резистор, конденсатор и катушка индуктивности в цепи переменного тока

### 1. Резистор в цепи переменного тока.

Генератор переменного тока замкнут на внешнюю цепь, содержащую только активное сопротивление  $r$ .

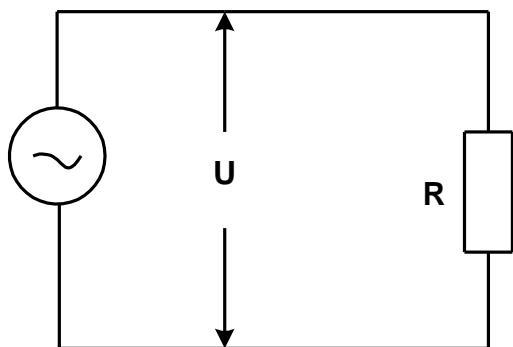


Рис. 9.2

Пусть в цепи есть переменный ток:  $i = i_m \sin \omega t$ .

Тогда по закону Ома для однородного участка цепи:

$$u = i \cdot R = i_m R \sin \omega t. \quad (9.5)$$

Таким образом, напряжение также меняется по синусоидальному закону. Разность фаз между током и напряжением равна нулю (рис. 9.3 а).

Удобным методом рассмотрения таких процессов является метод векторных диаграмм (рис. 9.3 б).

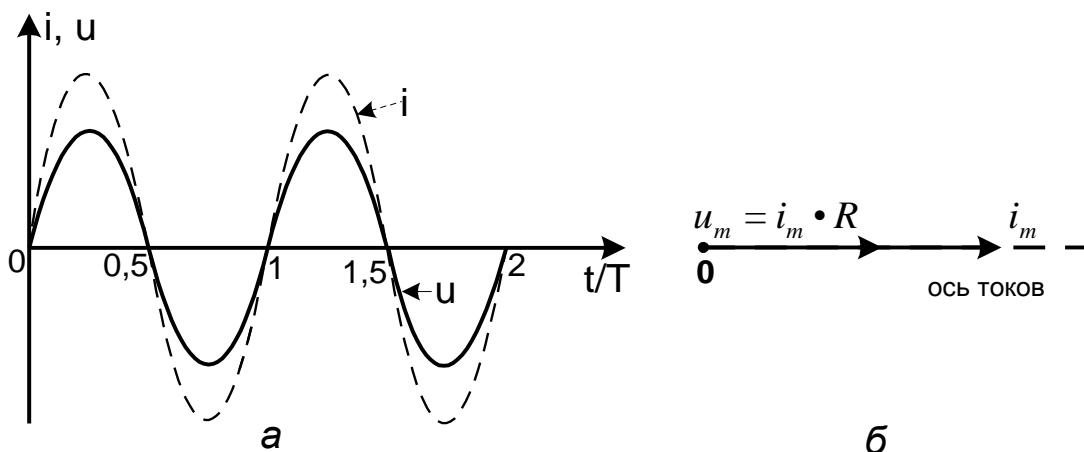


Рис. 9.3

## 2. Емкость в цепи переменного тока.

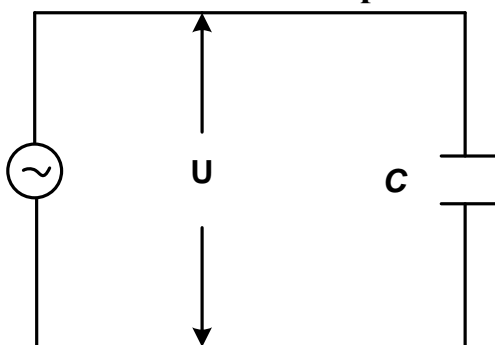


Рис.9.4

Участок цепи содержит только конденсатор емкости  $C$ . Разность потенциалов  $u = q / c$ , но поскольку

$$q = \int i dt = \int i_m \sin \omega t dt = -\frac{i_m}{\omega} \cos \omega t. \quad (9.6)$$

Следовательно,

$$u = -\frac{C i_m}{\omega} \cos \omega t = \frac{C i_m}{\omega} \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right). \quad (9.7)$$

Из (9.7) видно, что напряжение также изменяется по гармоническому закону. Однако между колебаниями тока и напряжения имеется разность (сдвиг) фаз (рис. 9.5).

**Колебания напряжения на конденсаторе отстают по фазе от колебаний тока на  $\pi / 2$ .**

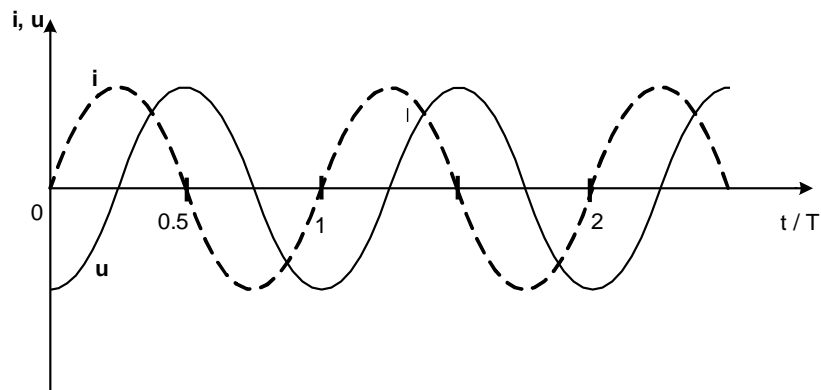


Рис. 9.5

Полученный результат имеет простой физический смысл. Напряжение на конденсаторе, в какой либо момент времени определяется существующим зарядом конденсатора. Но этот заряд был образован током, протекающим предварительно в более ранней стадии колебаний. Поэтому колебания напряжения запаздывают относительно колебаний тока.

Так, например, когда в момент времени  $t = 0$  сила тока равна нулю, то на конденсаторе еще имеется отрицательный заряд, перенесенный током в предыдущий момент времени, и напряжение в цепи не равно нулю.

Для обращения в нуль этого заряда надо, чтобы некоторое время проходил ток положительного направления, и поэтому когда заряд конденсатора (и напряжение) станции равны нулю, сила тока уже не будет равной нулю. Амплитуда напряжения на конденсаторе

$$u_m = i_m / \omega C. \quad (9.8)$$

Сравнивая это выражение с законом Ома для участка цепи с постоянным током, видим, что величина

$$X_c = 1 / \omega C \quad (9.9)$$

играет роль сопротивления участка цепи. Она получила название **реактивного (кажущегося) сопротивления емкости**.

Используем метод векторных диаграмм для обозначения сдвига фаз между напряжением на емкости и током в цепи (рис. 9.6).

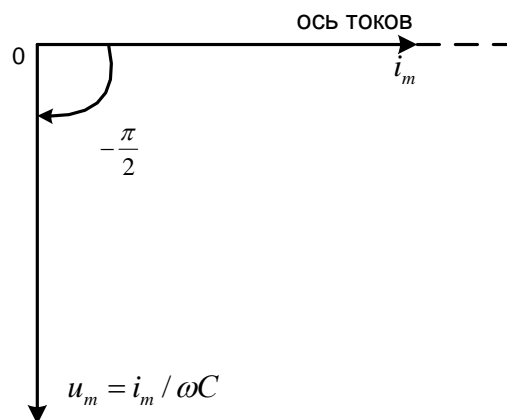


Рис.9.6

### 3. Индуктивность в цепи переменного тока.

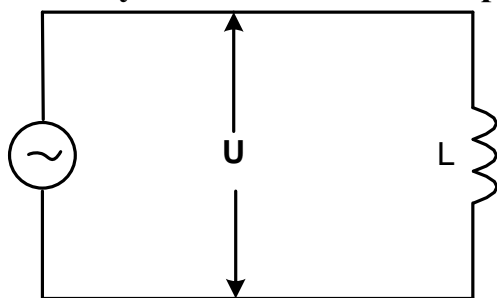


Рис. 9.7

Пусть участок цепи содержит только индуктивность  $L$ . При наличии переменного тока в катушке индуктивности возникает ЭДС самоиндукции  $\varepsilon_{cu}$ , и поэтому мы должны применить закон Ома для участка цепи, содержащего ЭДС.

$$U = iR - \varepsilon_{cu}.$$

В нашем случае  $R = 0$ ,  $u = -\varepsilon_{cu}$ , но  $\varepsilon_{cu} = -L \frac{di}{dt}$ , поэтому  $u = L \frac{di}{dt}$ . (9.10)

Поскольку  $i = i_m \sin \omega t$ , то

$$u = i_m \omega L \cos \omega t = i_m \omega L \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right). \quad (9.11)$$

Из (9.11) видно, что между колебаниями тока и напряжения имеется сдвиг фаз (рис. 9.8), причем колебания напряжения на индуктивности опережают по фазе колебания тока на  $\pi/2$ .

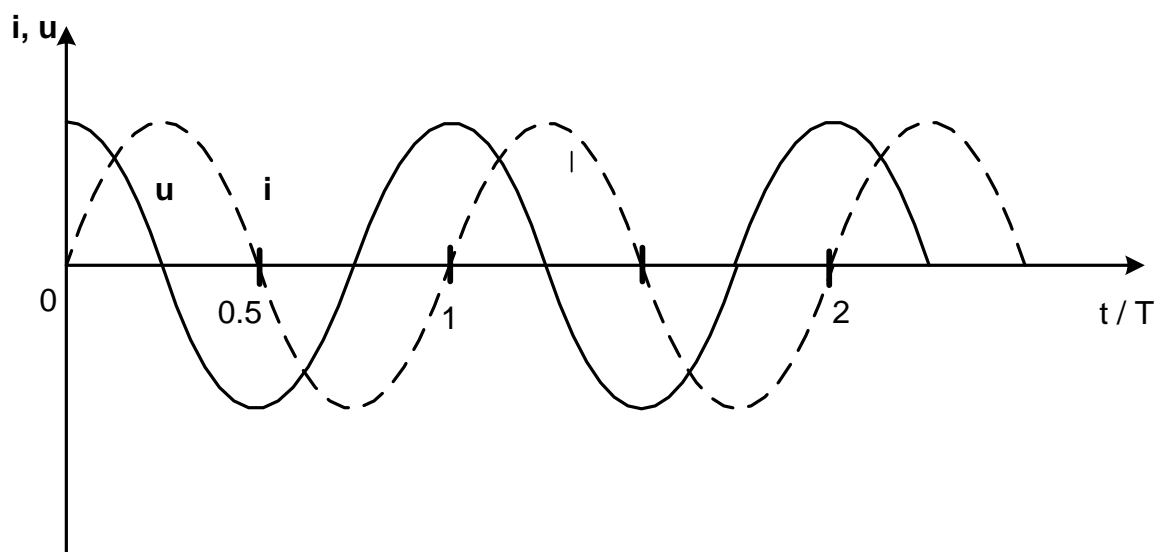


Рис. 9.8

Когда сила тока, возрастая, проходит через нуль, напряжение уже достигает максимального значения, после чего начинает уменьшаться: когда сила тока становится максимальной, напряжение проходит через нуль.

Физическая величина этой разности фаз заключается в следующем. Если сопротивление участка равно нулю, то приложенное напряжение в точности равно ЭДС самоиндукции с обратным знаком.

Но ЭДС самоиндукции пропорциональна не мгновенному значению силы тока, а скорости его изменения, которая будет наибольшей тогда, когда ток  $i$  проходит через нуль.

Поэтому максимумы напряжения совпадают с нулями тока, и наоборот.

Амплитуда напряжения равна:

$$u_m = i_m \omega L, \quad (9.12)$$

следовательно, величина  $X_L = \omega L$  играет ту же роль, что и сопротивление участка.

$X_L$  называется реактивным (кажущимся) сопротивлением индуктивности.

На векторной диаграмме виден сдвиг фаз между током и напряжением на индуктивности.

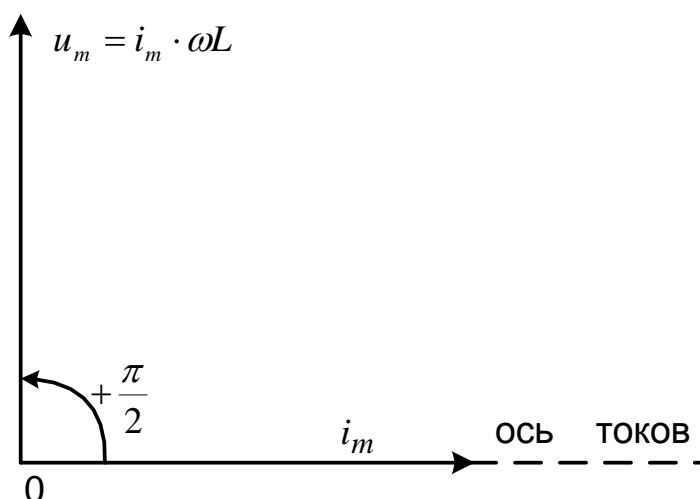


Рис. 9.9

### Закон Ома для переменного тока

Рассмотрим представленную на рис. 9.10 электрическую цепь, состоящую из последовательно включенных сопротивления  $R$ , катушки индуктивности  $L$  и конденсатора  $C$ ; которая называется последовательным колебательным контуром. Пусть на концы цепи подано напряжение:

$$u = u_m \cos \omega t. \quad (9.13)$$

Возникший в цепи электрический ток вызовет на всех элементах цепи соответствующие падения напряжения  $u_R$ ,  $u_L$  и  $u_C$ .

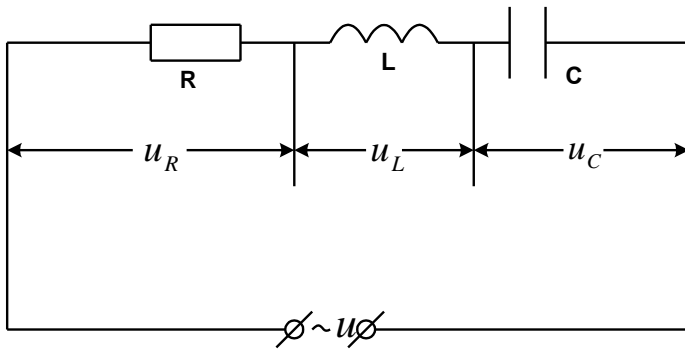


Рис. 9.10.

Для анализа процессов в этой цепи воспользуемся векторной диаграммой для амплитуд напряжений. При построении диаграммы, представленной на рис. 9.11, следует исходить из того, что текущий через все элементы цепи ток одинаков.

На рис.9.11 видно, что амплитуда полного напряжения  $u_m$  равна:

$$u_m = \sqrt{u_R^2 + (u_L - u_C)^2} = i_m \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}. \quad (9.14)$$

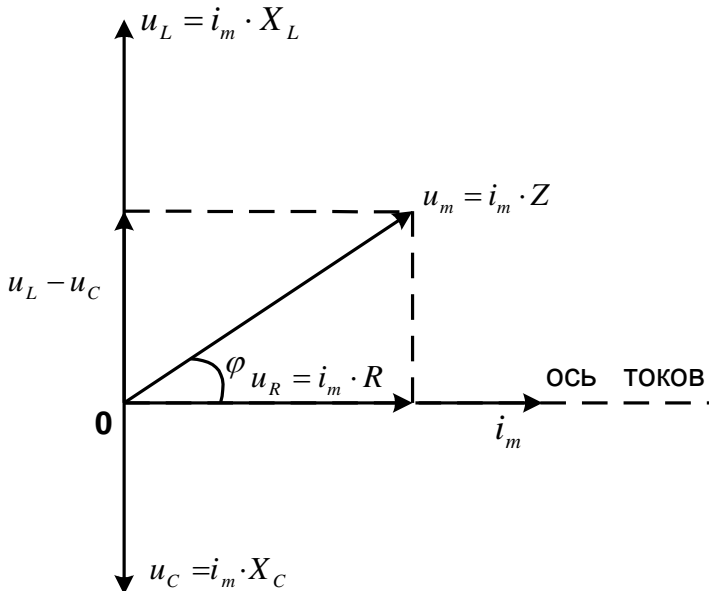


Рис. 9.11

Величина

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (9.15)$$

называется полным сопротивлением электрической цепи или импедансом, а

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} \quad (9.16)$$

реактивным сопротивлением цепи.

Величина

$$\rho = \sqrt{X_L \cdot X_C} = \sqrt{L/C} \quad (9.17)$$

волновым сопротивлением контура.

На рис. 9.11 видно, что между током и напряжением в цепи есть сдвиг фазы  $\varphi$ . Если напряжение соответствует (9.13), то ток равен:

$$i = i_m \cos(\omega t - \varphi). \quad (9.18)$$

При этом

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (9.19)$$

Отличительной особенностью полного сопротивления цепи на переменном токе является зависимость его от частоты переменного тока, то есть непостоянство  $Z$  (рис. 9.15).

Если падение напряжения на индуктивности и емкости одинаковы по модулю, то реактивное сопротивление  $X = 0$  и  $Z = R$ . В этом случае нет сдвига фаз между током и напряжением ( $\varphi = 0$ ).

## Резонанс напряжений

Рассмотрим электрическую цепь, представленную на рис. 9.10. Исчезновение реактивного сопротивления (9.16) происходит на частоте  $\omega_0$ , называемой резонансной:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (9.20)$$

В этом случае  $Z = R$ , то есть достигает наименьшей величины. При этом падение напряжения на активном сопротивлении равно внешнему напряжению, а падения напряжений на индуктивности ( $u_L$ ) и емкости ( $u_C$ ) одинаковы по амплитуде и противоположны по фазе (рис. 9.11). Напряжения на индуктивности и емкости, так следует из (9.8), (9.12), (9.15) и (9.20), равны:

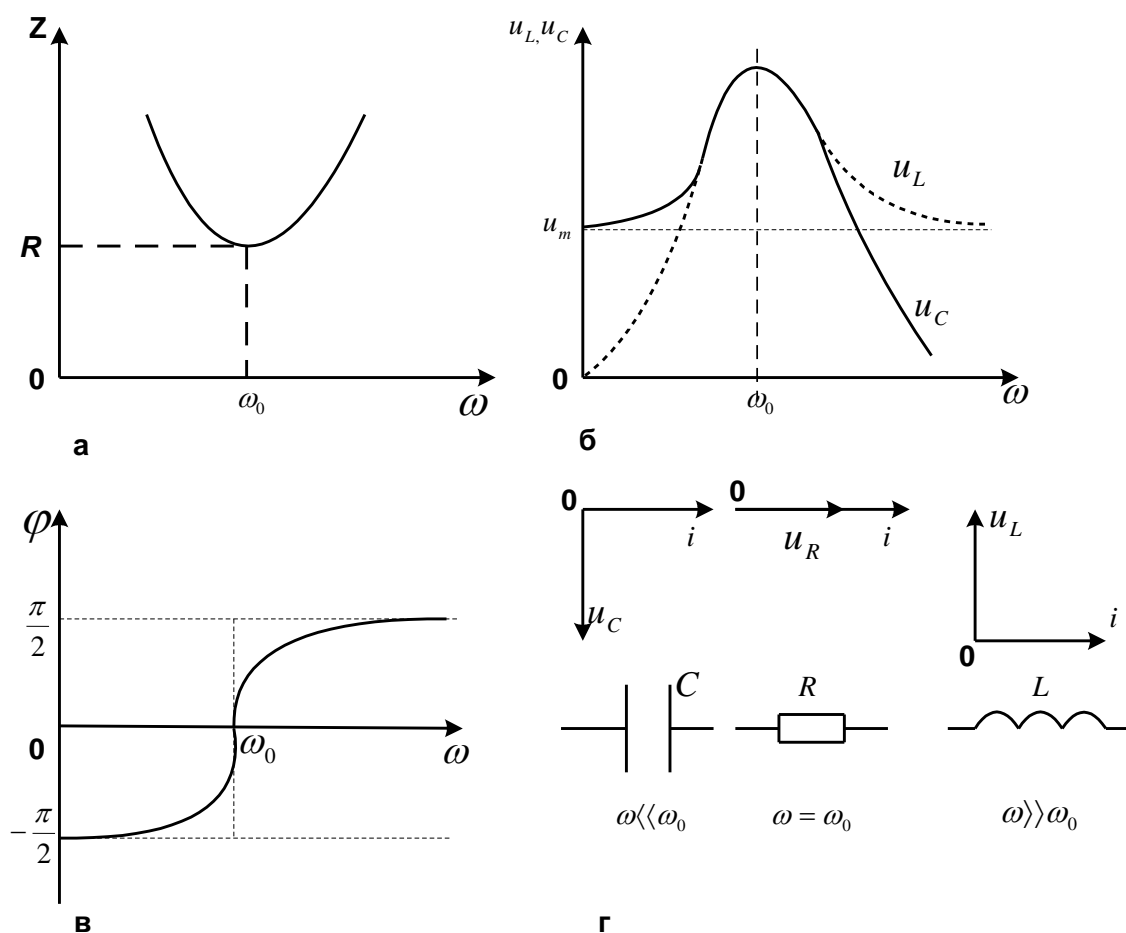


Рис. 9.12

$$(u_L)_{рез} = (u_C)_{рез} = \frac{u_m}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\rho}{R} \cdot u_m = Qu_m. \quad (9.21)$$

Здесь  $Q = \rho/R$  – добротность колебательного контура. По определению добротность  $Q$  равна отношению запасенной энергии в контуре к энергии, теряемой за период. Поскольку  $Q > 1$ , то  $(u_L)_{рез} > u_m$ . Это явление называется резонансом напряжения в последовательном контуре или резонансом.

На рис. 9.12 представлены графики зависимости от частоты импеданса (а), падений напряжений на индуктивности и емкости (б) и сдвига фаз между напряжением и током в последовательном контуре (в).

На рис. 9.12 (г) представлены некоторые диаграммы и эквивалентные импедансы цепи для трех частот  $\omega \ll \omega_0$ ,  $\omega = \omega_0$ ,  $\omega \gg \omega_0$ . Видно, что при  $\omega \ll \omega_0$  основную роль в цепи играет емкость, так как  $1/\omega C \gg R$  и  $1/\omega C \gg \omega L$ , а при  $\omega \gg \omega_0$  режим работы цепи определяется индуктивностью, поскольку  $\omega L \gg 1/\omega C$  и  $\omega L \gg R$ . При  $\omega = \omega_0$  ток в цепи определяется  $R$ .

### Резонанс токов

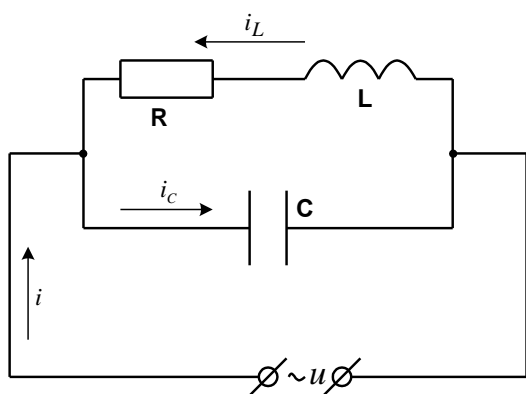


Рис. 9.13

Рассмотрим электрическую цепь, содержащую параллельно соединенные индуктивность  $L$  и емкость  $C$ , которая называется параллельным колебательным контуром (рис.9.13). Будем считать сопротивление провода катушки индуктивности  $R \ll \rho$  (см. (9.17)), что выполняется практически всегда в реальных электро- и радиотехнических устройствах, так как в них добротность контура  $Q = \rho/R \gg 1$ . Напряжение на обеих ветвях контура одинаковы и равны напряжению источника тока ( $u_{LR} = u_C = u_m$ ).

При малых частотах  $\omega \ll \omega_0$  (см. (9.20)) ток через индуктивность  $i_{LR}$  много больше тока через емкость  $i_C$ , а при  $\omega \gg \omega_0$  наоборот  $i_{LR} \ll i_C$  (см. рис. 9.14а,б). Поэтому вблизи  $\omega_0$  полный ток  $i_m$  и напряжение  $u_m$  совпадают по фазе (рис.9.14в), то есть наблюдается резонанс, называемый резонансом тока.

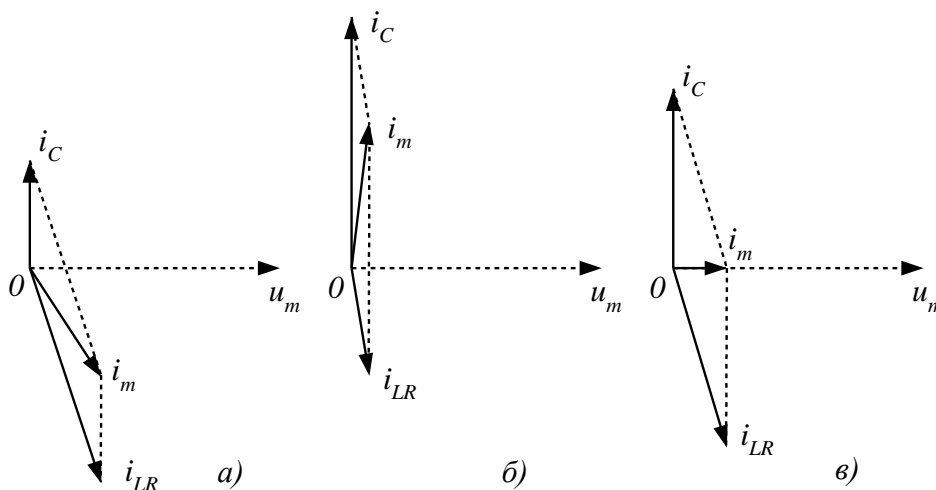


Рис.9.14



Можно показать, что полное сопротивление (импеданс  $Z$ ) такого контура равно:

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 C^2 + \frac{1 - 2\omega^2 LC}{R^2 + \omega^2 L^2}}}, \quad (9.22)$$

Из (9.22) следует, что при  $\omega = \omega_0$  и  $R \ll \rho$  импеданс параллельного контура равен:

$$Z_p = \frac{L}{RC} = \frac{\rho^2}{R} = Q^2 R. \quad (9.23)$$

Более строгий анализ показывает, что резонансная частота равна:

$$\omega_p^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{R}{Z_p}\right) = \omega_0^2 \left(1 - \frac{R^2}{\rho^2}\right) = \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{Q^2}\right). \quad (9.24)$$

Поскольку для большинства устройств выполняется условие  $R \ll \rho$ , то из (9.24) следует, что  $\omega_0 = \omega_p$ , и это соотношение используется на практике.

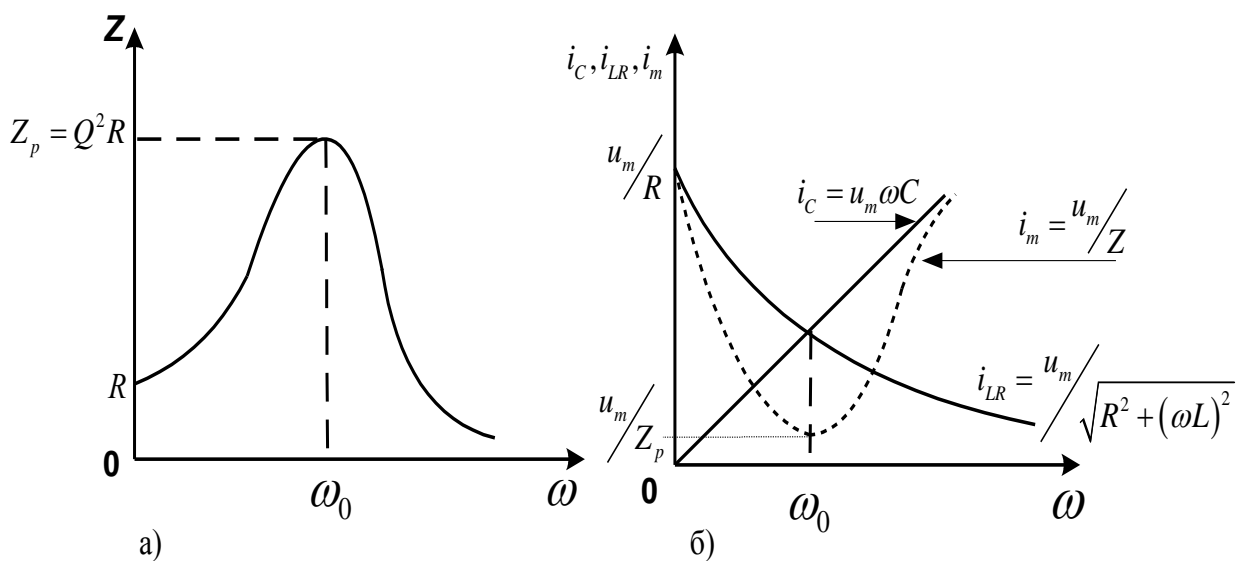


Рис.9.15

На рис. 9.15. представлены графики зависимости от частоты импеданса (а), токов  $i_{LR}$  и  $i_C$  внутри контура и тока во внешней цепи  $i_m$  (б).

Таким образом, резонанс токов состоит в том, что токи  $i_{LR}$  и  $i_C$  при  $\omega = \omega_0$  оказываются почти равными по величине и почти противоположными по фазе, а также много большими тока  $i_m$  от источника тока. Происходит обмен энергией между  $L$  и  $C$ , а источник тока компенсирует потерю энергии

в активном сопротивлении  $R$ . Из законов сохранения энергии и Джоуля-Ленца между токами  $i_{LR}$  и  $i_m$  при резонансе можно установить связь:

$$i_m^2 Z_p = i_{LR}^2 R \text{ или } i_{LR} = i_m Q,$$

то есть ток во внешней цепи (от источника тока) в  $Q$  раз меньше тока внутри контура.

### Мощность в цепи переменного тока

Мгновенное значение мощности переменного тока равно:

$$P(t) = u(t) \cdot i(t),$$

где  $u(t) = u_m \cos \omega t$  и  $i = i_m \cos(\omega t - \varphi)$ .

Среднее значение мощности за период определяется интегралом, аналогичным (9.4):

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u_m \cos \omega t \cdot i_m (\cos \omega t - \varphi) dt = \frac{1}{2} u_m i_m \cos \varphi. \quad (9.25)$$

Если перейти к действующим величинам тока и напряжения ( $I_{эфф} = i_m / \sqrt{2}$  и  $U_{эфф} = u_m / \sqrt{2}$ ), то (4.24) преобразуется к виду:

$$P = I_{эфф} U_{эфф} \cos \varphi. \quad (9.26)$$

Множитель  $\cos \varphi$  иногда называют коэффициентом мощности.

Из формулы (9.26) видно, что сдвиг фаз между током и напряжением играет такую же роль в  $P$ , как ток и напряжение. Если в цепи реактивное сопротивление отсутствует, то  $\varphi = 0$ ,  $\cos \varphi = 1$  и  $P = I_{эфф} U_{эфф}$ . Если же цепь содержит только реактивное сопротивление ( $R=0$ ), то  $\varphi = \pm \pi/2$ ,  $\cos \varphi = 0$  и средняя мощность  $P = 0$ , какими бы большими ни были ток и напряжение.

### Примеры решения задач

**Задача 9.1.** Уравнение зависимости силы тока в колебательном контуре от времени дается в виде  $i = -0,02 \sin 400\pi t$  А. Индуктивность контура 1 Гн. Найти: 1) период колебаний, 2) емкость контура, 3) максимальную разность потенциалов на обкладках конденсатора, 4) максимальную энергию магнитного поля, 5) максимальную энергию электрического поля.

#### Анализ и решение

В колебательном контуре, состоящем из конденсатора  $C$  и катушки индуктивности  $L$  (рис. 9.16) происходят незатухающие колебания по закону:

$$i = i_m \sin(\omega_0 t - \varphi_0). \quad (1)$$

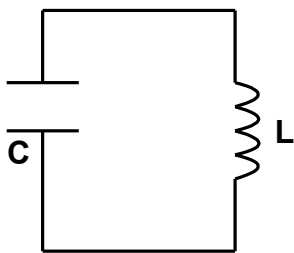


Рис.9.16

Так как  $i = -0,02 \sin 400\pi t$  А, можно записать, что амплитуда колебаний тока  $i_m$  равна  $0,02$  А, частота  $\omega_0$  равна  $400 \pi$  Гц, начальная фаза  $\varphi_0 = \pi$ . Зная частоту колебаний тока в контуре, легко рассчитать период колебаний, используя связь между  $\omega_0$  и  $T$ :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 0,005 \text{ с} .$$

Как известно, период незатухающих колебаний в контуре рассчитывается по формуле Томсона:

$$T = 2\pi\sqrt{LC} . \quad (2)$$

Зная значения  $T$  и  $L$ , можно вычислить емкость  $C$ :

$$C = \frac{T^2}{4\pi^2 L} = \frac{1}{\omega_0^2 L} = 6,3 \cdot 10^{-7} \text{ Ф} .$$

Максимальная разность потенциалов на обкладках конденсатора равна:

$$U_c = i_m \frac{1}{\omega_0 C} . \quad (3)$$

Подставив данные из условия задачи, получим  $U_c = 25,2$  В. Определим максимальную энергию магнитного поля  $W_H$  и максимальную энергию электрического поля  $W_E$

$$W_H = \frac{Li_m^2}{2} , \quad (4)$$

$$W_E = \frac{CU_c^2}{2} . \quad (5)$$

Произведя расчет, получим:  $W_H = 2 \cdot 10^{-4}$  Дж,  $W_E = 2 \cdot 10^{-4}$  Дж.

**Задача 9.2.** Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью  $0,2$  мкФ и катушки индуктивностью  $5,07 \cdot 10^{-3}$  Гн. Найти: 1) при каком логарифмическом декременте затухания разность потенциалов на обкладках конденсатора за  $10^{-3}$  с уменьшится в три раза? 2) чему при этом равно сопротивление катушки индуктивности?

#### Анализ и решение

Каждый реальный колебательный контур (рис.9.17) обладает активным сопротивлением, в основном катушки индуктивности, и энергия, занесенная в таком контуре, постоянно уменьшается, так как расходуется на нагревание. Электрические колебания в таком контуре будут затухающими.

Логарифмический декремент затухания определяется как натуральный логарифм отношения двух значений амплитуд (заряда, напряжения, тока), взятых через период колебаний  $T$ :

$$\lambda = \ln \frac{u(t)}{u(t+T)} = \beta T, \quad (1)$$

где  $\beta$  – коэффициент затухания,  $\beta = R/2L$ ;  $T$  – период колебаний;  $T = 2\pi / \sqrt{LC}$  (если  $\beta \ll \omega_0$ ).

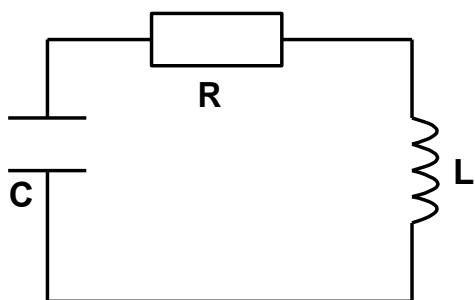


Рис.9.17

При затухающих колебаниях амплитуда напряжения на конденсаторе изменяется по закону (рис. 9.18):

$$u_c = u_m e^{-\beta t}. \quad (2)$$

Учитывая условие задачи, запишем:

$$\frac{u(t)}{u(t+t_1)} = e^{-\beta t_1} = 3. \quad (3)$$

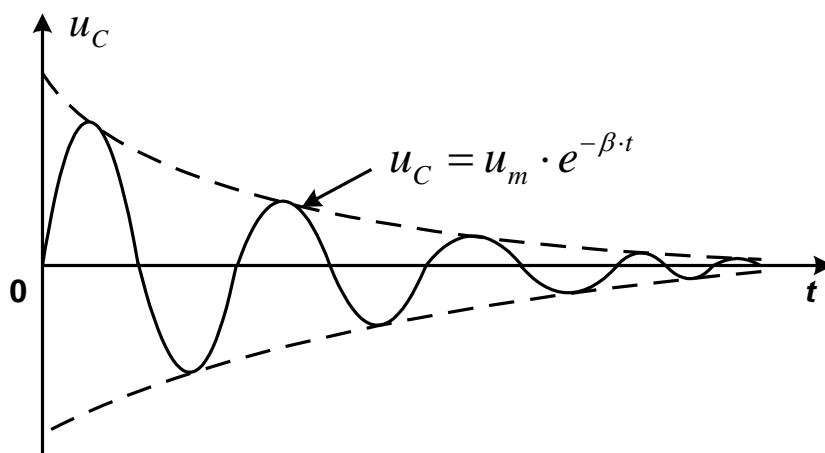


Рис. 9.18

Из (3) имеем, что  $\beta = \ln 3 / t_1$ . Подставив в (1), получим выражение для  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{\ln 3}{t_1} T. \quad (4)$$

Вычислим  $\lambda$ :

$$\lambda = \ln 3 \cdot \frac{2\pi \sqrt{LC}}{t_1} = 0,22.$$

Теперь рассчитаем активное сопротивление контура  $R$ :

$$R = \beta \cdot 2L = \frac{\ln 3}{t_1} 2L \cong 11 \text{ Ом}.$$

**Задача 9.3.** Катушка длиной  $\ell = 0,5$  м и площадью поперечного сечения  $S = 0,01$  м<sup>2</sup> включена в цепь переменного тока частотой 50 Гц. Число витков катушки  $N = 3000$ . Найти активное сопротивление катушки, если известно, что сдвиг фаз между напряжением и током равен  $60^\circ$ .

### Анализ и решение

Представим катушку в виде последовательно включенных активного сопротивления  $R$  и катушки индуктивности  $L$  (рис. 9.19). Переменный ток вызовет на всех элементах падение напряжения. Изобразим процессы в этой схеме с помощью векторной диаграммы.

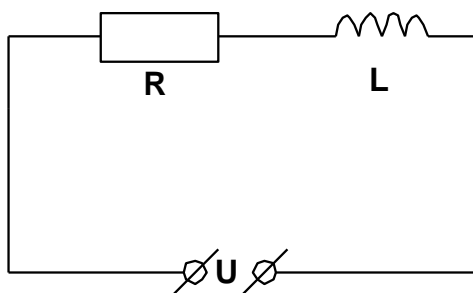


Рис. 9.19

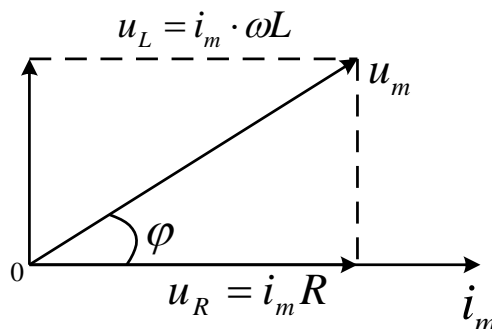


Рис. 9.20

Из диаграммы на рис. 9.20 видно, что

$$u_m = \sqrt{u_L^2 + u_R^2} = i_m \sqrt{(\omega L)^2 + R^2},$$

где  $u_L$  – амплитуда напряжения на катушке;

$u_R$  – амплитуда напряжения на активном сопротивлении  $R$ ;

$i_m$  – амплитуда тока, текущего через все элементы схемы.

Величина  $z = \sqrt{(\omega L)^2 + R^2}$  является импедансом схемы. Очевидно, угол  $\varphi$  – сдвиг фаз между  $u_m$  и  $i_m$  можно определить следующим образом:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R}. \quad (1)$$

Отсюда активное сопротивление  $R$  равно:  $R = \omega L / \operatorname{tg} \varphi$ . (2)

Индуктивность катушки  $L$  найдем из соотношения:

$$L = \frac{\mu \mu_0 N^2 S}{\ell}, \quad (3)$$

где  $\mu$  – относительная магнитная проницаемость среды, в нашем случае  $\mu = 1$ ;

$\mu_0$  – магнитная постоянная, равная в СИ  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м;

$N$  – число витков;  $\ell$  – длина, а  $S$  – площадь поперечного сечения катушки.

Запишем окончательное выражение для расчета  $R$ , подставив (3) в (2) а числовые данные из условия задачи:

$$R = \frac{2\pi f \mu_0 N^2 S}{\ell \cdot \operatorname{tg} \varphi} = 4,1 \text{ Ом.}$$

**Задача 9.4.** Катушка индуктивности включена в цепь переменного тока напряжением 220 В и частотой 50 Гц. Найти импеданс, индуктивность катушки и активное сопротивление, если известно, что катушка поглощает мощность 400 Вт и сдвиг фаз между напряжением и током равен  $60^\circ$ .

### Анализ и решение

Мощность в цепи переменного тока определяется выражением:

$$P = I U \cos \varphi. \quad (1)$$

Если катушка включена в цепь переменного тока напряжением  $u$ , то ток  $i$  через нее равен:

$$I = \frac{U}{Z}, \quad (2)$$

где  $Z$  – импеданс катушки. Подставив (2) в (1), получим выражение, связывающее мощность, поглощаемую катушкой,  $P$  с ее импедансом  $Z$ :

$$Z = \frac{U \cos \varphi}{P}. \quad (3)$$

Катушка индуктивности в цепи переменного тока представляет собой последовательно включенное активное сопротивление  $R$  и идеальную катушку индуктивности  $L$  (рис. 9.21).

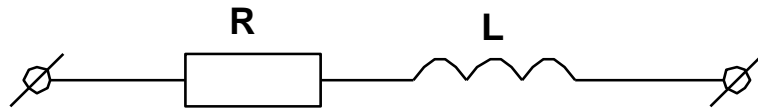


Рис.9.21

Импеданс катушки можно выразить, зная ее  $R$  и  $L$ , следующим образом:

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}. \quad (4)$$

Для нахождения  $R$  и  $L$  соотношения (4) недостаточно. Используем выражение для сдвига фаз  $\varphi$  в цепи переменного тока для последовательно соединенных  $R$  и  $L$ :

$$\operatorname{tg} \varphi = \omega L / R. \quad (5)$$

Из соотношения (4) и (5) рассчитаем  $R$  и  $L$  катушки:

$$Z = \frac{U^2 \cos \varphi}{P} = 60,6 \text{ Ом,}$$

$$R = Z \cos \varphi = 30,3 \text{ Ом,}$$

$$L = \frac{R \operatorname{tg} \varphi}{2\pi f} = 0,165 \text{ Гн.}$$

## ТЕМА 10

### ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ И ВОЛНОВАЯ ОПТИКА

Основные представления о свете человек выработал еще на заре цивилизации. Это связано с тем, что при помощи зрения он получает около 90% сведений об окружающем его мире. Задолго до установления природы света были известны основные законы оптики: закон прямолинейного распространения света в оптически однородной среде, законы отражения и преломления света. Эти законы легли в основу представления о свете как о потоке движущихся частиц.

Через много столетий (в XVIII веке) были выявлены волновые свойства света, проявившиеся в явлениях интерференции и дифракции; а из опытов по поляризации следовало, что свет – это поперечная волна. Максвелл в 70-х годах XIX века, в построенной им электродинамике связал оптику с электромагнетизмом, показав, что свет – электромагнитная волна.

Изучение взаимодействия света с веществом, выполненное на рубеже XIX и XX веков и в начале XX века, показало недостаточность волновых представлений для понимания этих явлений. Такие явления, как фотоэффект, тепловое излучение, спектры испускания и поглощения, получили объяснения на основе новой теории – квантовой физики, в которой нашли объяснения кажущиеся противоречия между волновыми и корпускулярными свойствами света.

В полном спектре электромагнитных волн видимое излучение (диапазон длин волн в вакууме  $\lambda = 400 \div 750$  нм) занимает малую часть, но играет для человека решающую роль. Волны с  $\lambda = 750$  нм вызывают у человека ощущение красного цвета, а с  $\lambda = 400$  нм – фиолетового. Волны с  $\lambda > 750$  нм (инфракрасные) и  $\lambda < 400$  нм (ультрафиолетовые) не вызывают у человека зрительных ощущений, но оказывают на него физиологическое воздействие. Поскольку природа электромагнитных волн с любым  $\lambda$  одинакова, термин «свет» в физике часто применяют ко всем излучениям, т.е. шире, чем в обыденной жизни.

В заключение приведем полный спектр электромагнитных волн (рис. 10.1).

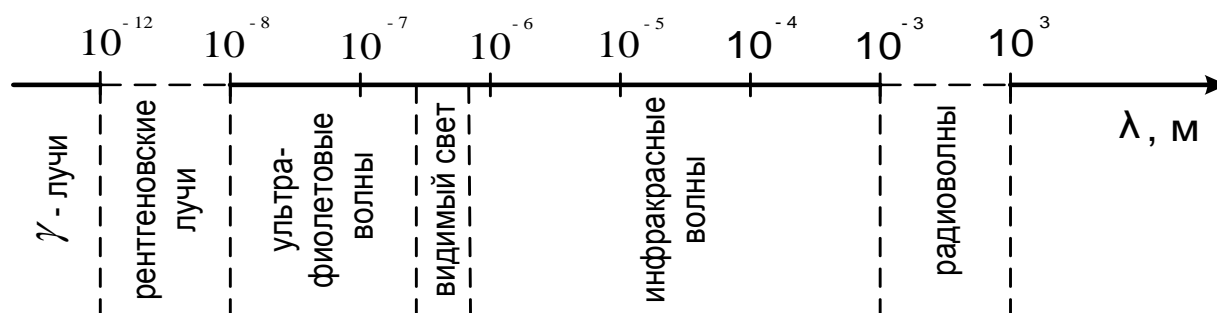


Рис. 10.1.

## § 1. Геометрическая оптика

### Распространение, отражение и преломление электромагнитных волн в приближении геометрической оптики

Геометрическая (лучевая) оптика использует идеализированное представление о **световом луче** – бесконечно тонком пучке света, прямолинейно распространяющемся в однородной среде, и о **точечном источнике излучения** (света), равномерно светящем во все стороны. Опираясь на эти представления, лучевая оптика изучает возможности управления распространением световых лучей при помощи их отражения и преломления на границах раздела оптически разнородных сред, т.е. сред, обладающих разными показателями преломления.

Лучевая оптика развилась раньше волновой. Явление дифракции световых волн ограничивает справедливость ее выводов. Если выполняется условие  $\lambda/d \ll 1$  ( $d$  – характерный размер предмета, находящегося на пути волны), то приближение лучевой оптики хорошо выполняется; если же  $\lambda \approx d$ , то наблюдается явление дифракции.

Если в однородной среде свет распространяется прямолинейно, доказательством чему является наличие резко очерченных теней от предметов, то на границе раздела двух сред с разными показателями преломления наблюдается в общем случае частичное отражение и преломление светового луча. Законы отражения (1,2) и преломления (3,4) формируются так:

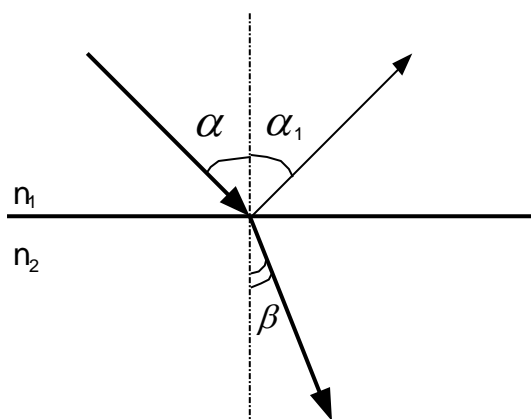


Рис.10.2.

1. Луч падающий, луч отраженный и перпендикуляр к поверхности раздела, восстановленный из точки падения луча, лежат в одной плоскости, называемой **плоскостью падения**.

2. Угол падения  $\alpha$  равен углу отражения  $\alpha_1$  (рис.10.2):  $\alpha = \alpha_1$ .

3. Луч падающий, луч преломленный и перпендикуляр к поверхности раздела, восстановленный из точки падения луча, лежат в одной плоскости – плоскости падения.

4. Отношение синуса угла падения  $\alpha$  к синусу угла преломления  $\beta$  равно отношению показателя преломления второй среды к первой:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (10.1)$$

Показатель преломления среды определяется отношением скорости света в вакууме к скорости света в данной среде

$$n = \frac{c}{v}. \quad (10.2)$$



## Преломление на сферической поверхности. Линзы. Формула линзы

Преломление на плоской границе раздела двух сред с разными  $n$  оставляет волну плоской и изменяет кривизну сходящейся (или расходящейся) волны (рис. 10.3), но не может превратить расходящуюся волну в сходящуюся или плоскую.

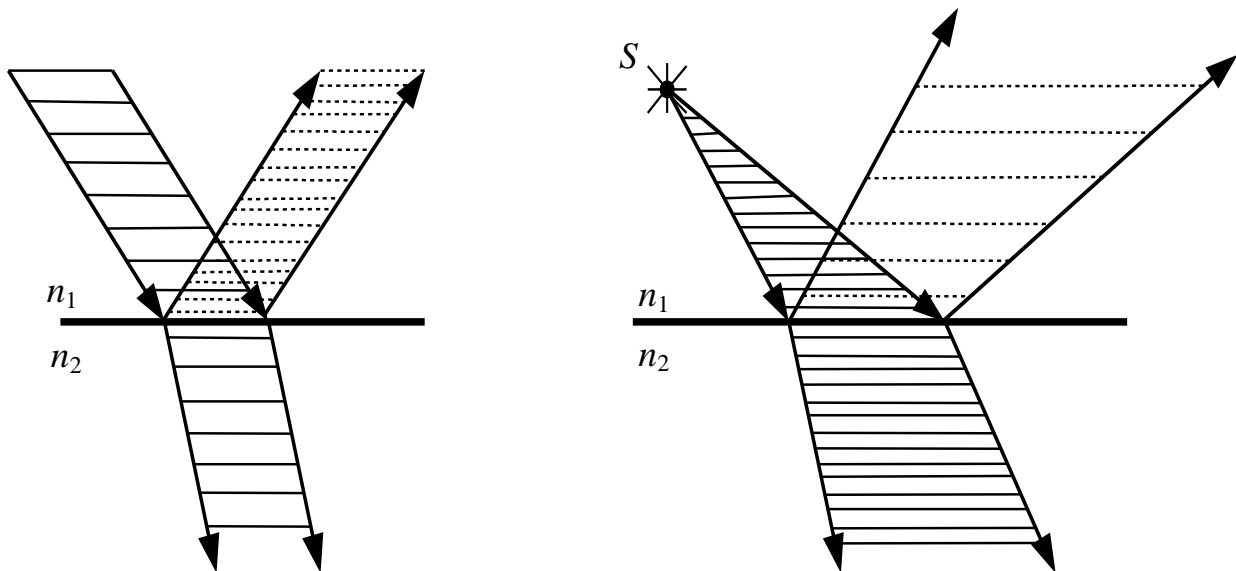


Рис. 10.3

Преломление на кривой поверхности позволяет превращать расходящуюся волну в сходящуюся и наоборот. Для этой цели применяются **линзы** – комбинации двух сферических или плоской и сферической поверхностей, ограничивающих среду с другим показателем преломления.

На рис. 10.4 изображены две сферические поверхности радиусами  $R_1$  и  $R_2$ , ограничивающие линзу. Слева и справа от линзы находится безграничная среда с показателем преломления  $n_1 < n_2$ . Прямая, проходящая через центры обеих сфер  $O_1$  и  $O_2$ , называется **главной оптической осью** линзы. Пусть светящаяся точка находится в  $S_1$ . Луч  $S_1C$  проходит через линзу без преломления. Рассмотрим прохождения через линзу произвольного луча  $S_1A$ . Преломившись на границе, он пойдет в направлении  $AB$ . На второй границе луч еще раз преломляется и пересекает главную оптическую ось в точке  $S_2$ . Эта точка является изображением точки  $S_1$ . Введем следующие обозначения отрезков  $S_1A = d_1$  и  $BS_2 = d_2$ ; толщина линзы  $CD = d$ . Если считать линзу тонкой, т.е.  $d_1, d_2, R_1$  и  $R_2 \gg d$ , и считать лучи от светящейся точки параксиальными (приосевыми, т.е. идущими под небольшими углами к главной оптической оси), то  $S_1A = S_1C = d_1$ ,  $BS_2 = DS_2 = d_2$ ,  $S_1S_2 = d_1 + d_2$ ,  $CD \approx 0$  и точка  $O$  – оптический центр линзы.

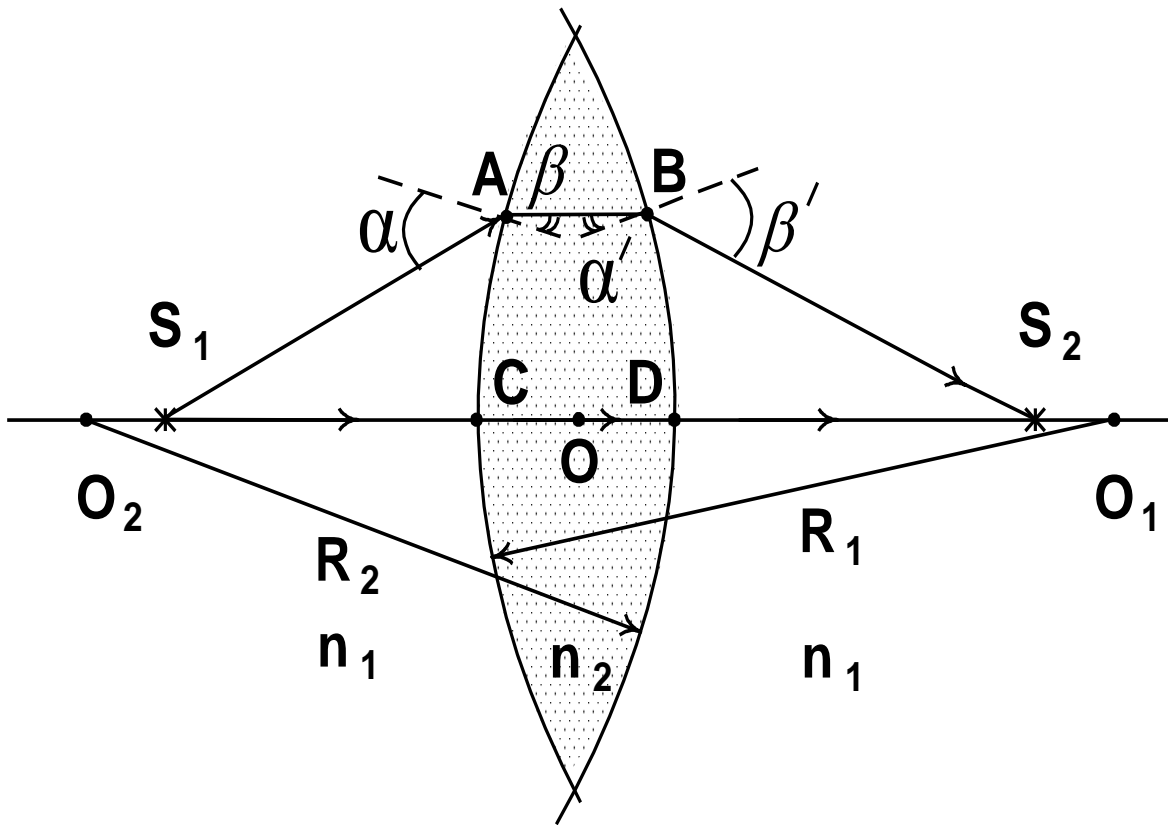


Рис.10.4

В этом приближении (тонкая линза и параксиальные пучки) можно получить обобщенную формулу линзы, связывающую расстояния от предмета (источника)  $d_1$  до его изображения  $d_2$  с фокусным расстоянием линзы  $F$ :

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{F}, \quad (10.3)$$

где  $F$  в простейшем случае двояковыпуклой линзы равно:

$$F = \frac{1}{\left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)}. \quad (10.4)$$

Помимо собирающих линз существуют рассеивающие линзы. Прохождение лучей через такую линзу показано на рис. 10.5. Все обозначения такие же, как на рис. 10.4.

Видно, что луч  $S_1A$ , преломившись в точках  $A$  и  $B$ , не пересечет ось  $O_1O_2$ , и действительного изображения источника  $S_1$  не возникает на экране справа от линзы, где бы его не помещали.

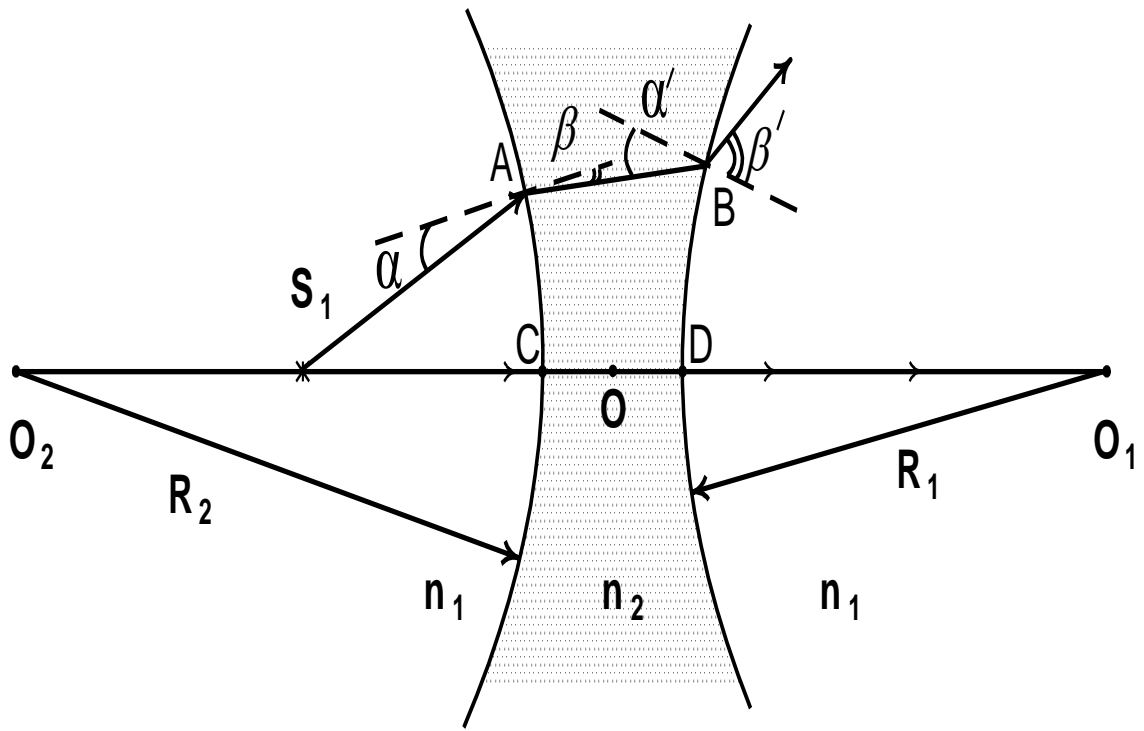


Рис. 10.5

Рассмотрим важнейшие частные случаи для соотношения (10.3), определяющие правила построения изображений в тонких линзах. Если линза собирающая, а источник находится на бесконечности ( $d_1 \rightarrow \infty$ ), то  $d_2 = F$ , т.е. лучи, параллельные главной оптической оси, собираются в фокусе линзы. Если же источник находится в фокусе собирающей линзы ( $d_1 = F$ ), то изображение его получится на бесконечности ( $d_2 \rightarrow \infty$ ), т.о. после линзы будет параллельный пучок. Обе ситуации представлены на рис. 10.6, который показывает, что для тонкой линзы фокусные расстояния слева и справа от линзы одинаковы.

На рисунке дано условное изображение тонкой линзы в виде прямой черты; стрелки у краев черты символизируют ход истинных поверхностей линзы.

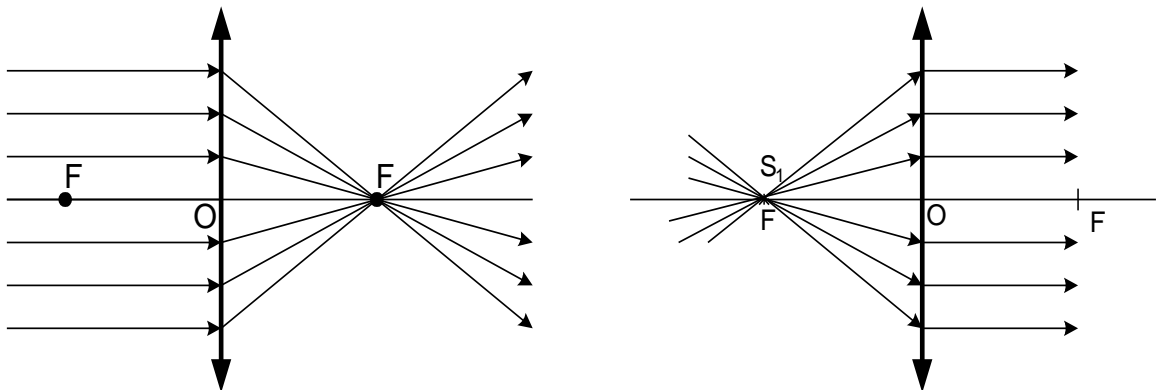


Рис. 10.6

Соотношение (10.3) может быть использовано и для рассеивающей линзы, если принять во внимание следующее правило знаков:

- а) фокусное расстояние собирающей линзы имеет положительный знак, а рассеивающей – отрицательный;
- б) расстояние от источника (предмета) до линзы  $d_1$  всегда имеет положительный знак;
- в) расстояние до изображения  $d_2$  имеет положительный знак, если изображение действительное, отрицательный – если мнимое.

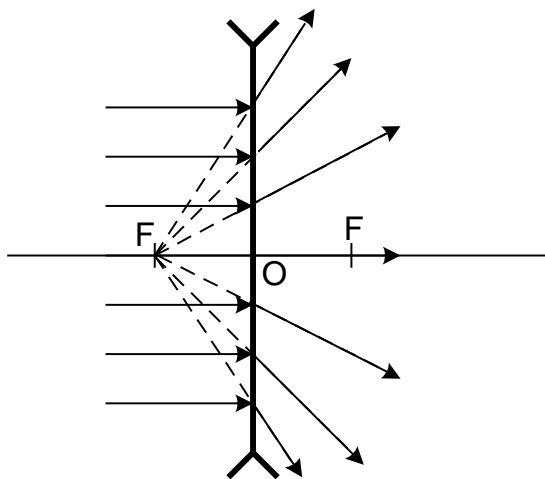


Рис. 10.7

Исходя из введенных правил, покажем, что параллельный пучок лучей, проходя через рассеивающую линзу, становится расходящимся, как бы давая в фокусе мнимое изображение находящегося на бесконечности источника (рис. 10.7).

Действительно,  $d_1 = \infty$ , поэтому из (10.3) следует, что  $-\frac{1}{d_2} = -\frac{1}{F}$ , т.е.  $d_2 < 0$ .

Уравнение (10.3) позволяет выбрать лучи удобные для построения изображения в собирающих и рассеивающих линзах. На рис. 10.8. показано построение основных лучей для собирающей и рассеивающей линз.

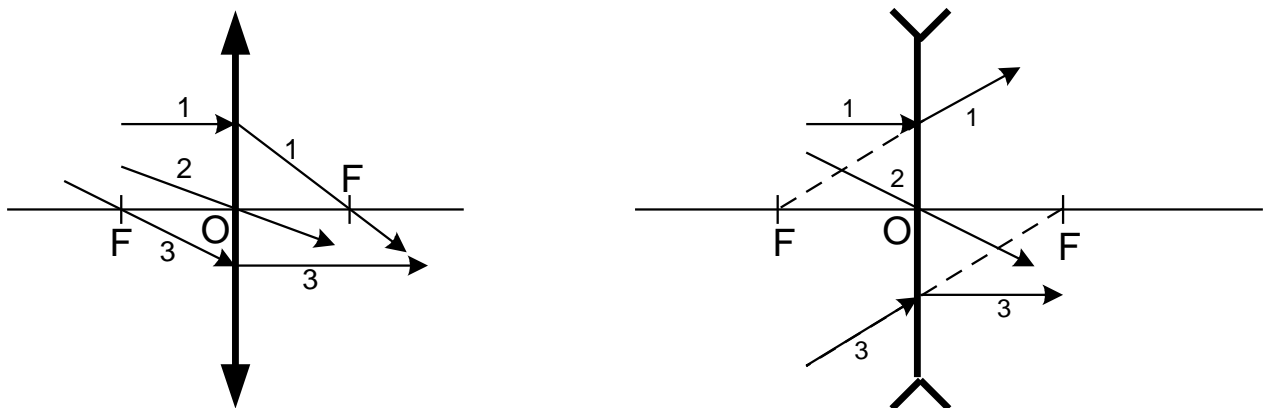


Рис. 10.8

Так как центральную часть линзы для узких пучков можно уподобить плоскопараллельной пластине, то пренебрежение толщиной линзы означает пренебрежение смещением параллельного пучка, идущего под углом  $\varphi$  к оптической оси (рис. 10.9).

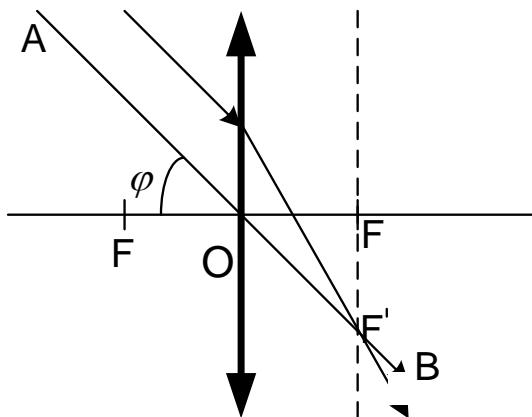


Рис. 10.9.

Прямую  $AB$  называют **побочной оптической осью**; ее пересечение с фокальной плоскостью определяет положение побочного фокуса  $F'$ , где сходится после преломления пучок лучей, параллельный этой оси.

В геометрической оптике часто используется понятие оптической силы линзы  $D = 1/F$ ; единица измерения величины  $D$  – диоптрия. Диоптрия соответствует  $F = 1\text{ м}$ .

## § 2. Волновая оптика

### Интерференция света. Условия наблюдения интерференционной картины. Когерентность

Волновые свойства света проявляются в явлении **интерференции**. Явление интерференции заключается в том, что при определенных условиях в области, освещаемой двумя источниками света, вместо светового пятна наблюдается чередование светлых и темных полос. Для наблюдения интерференции необходимо, чтобы источники света были **когерентными**: у волн этих источников совпадают плоскости колебания электрических векторов и частоты колебаний; и эти волны приходят в область наблюдения (точка  $A$  на рис.10.10) под малым апертурным углом  $\alpha$ .

Рассмотрим распространение в пространстве бегущих электромагнитных волн от двух когерентных источников с начальной разностью фаз равной нулю.

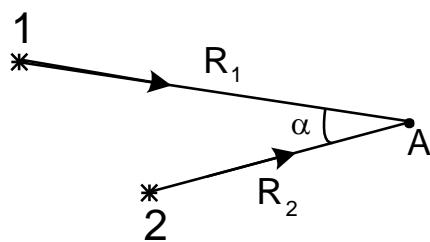


Рис.10.10

Если точка наблюдения  $A$  находится от источников соответственно на расстоянии  $R_1$  и  $R_2$  (рис. 10.10), то величины их электрических полей ( $e_1$  и  $e_2$ ) в точке  $A$  равны, соответственно:

$$e_1 = E_1 \cos(\omega t - kR_1), \quad e_2 = E_2 \cos(\omega t - kR_2). \quad (10.5)$$

Поскольку практически все приемники света реагируют на энергию (усредненную по времени регистрацию интенсивность излучения, пропорциональную квадрату амплитуды  $E$  колебаний) то интенсивность  $I$  колебаний в точке  $A$  равна:

$$I_A = E_A^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \cos k(R_2 - R_1), \quad (10.6)$$

где  $E_1^2$ ,  $E_2^2$  – интенсивность света в точке  $A$ , созданная первым и вторым источниками, соответственно.

Если источники некогерентны, то  $I_A = E_1^2 + E_2^2 = I_1 + I_2$ , т.е. интенсивности света от двух источников просто складываются, и явления интерференции нет.

Третий член в уравнении (10.6) получил название интерференционного; величина его зависит от разности хода волн от когерентных источников до точки наблюдения:

$$\Delta = R_2 - R_1.$$

Фактически сдвиг фаз между слагаемыми колебаниями  $\varphi$  обусловлен разностью хода:

$$\varphi = k\Delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot (R_2 - R_1). \quad (10.7)$$

При переходе от одной точки к другой разность хода будет изменяться. Это вызовет периодическое изменение в пространстве амплитуды результирующего колебания, а, следовательно, и интенсивности колебаний. В пространстве наблюдения возникает чередование областей максимальной  $I_{max}$  и минимальной  $I_{min}$  интенсивности света. Наиболее отчетливо эта картина будет наблюдаться при равенстве амплитуд слагаемых колебаний ( $E_1 = E_2 = E$ ).

Запишем условия, при которых наблюдаются  $I_{max}$  и  $I_{min}$ :

если разность хода равна нулю или целому числу длин волн  $\Delta = R_2 - R_1 = m \cdot \lambda$ ,

где  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ , то  $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} m\lambda = 2\pi m$  и  $\cos \varphi = 1$ , тогда

$I_A = (E_1 + E_2)^2 = I_{max} = 4E^2$ ; если разность хода равна нечетному числу

полуволн,  $\Delta = R_2 - R_1 = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ), то  $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (2m + 1) \frac{\lambda}{2} = \pi(2m + 1)$

и  $\cos \varphi = -1$ , тогда  $I_A = (E_1 - E_2)^2 = I_{min} = 0$ .

Отметим, что при интерференции суммарная энергия остается неизменной, происходит только ее перераспределение в пространстве.

## Способы и условия наблюдения интерференции света

Существует много способов разделения световых пучков, идущих от точечного источника излучения, и создания вторичных (когерентных) источников света, например опыт Юнга, зеркала Ллойда и т.п. (см.[1, 5]). Мы рассмотрим один из них с помощью билинзы Бийе.

Собирающая линза разрезается пополам, как показано на рис.10.12, и половинки ее раздвигаются на небольшое расстояние. Если точечный источник света поместить в двойном фокусе линзы ( $f_1 = 2F$ ), то изображение его в соответствии с (10.3) должно получиться также в точке двойного фокуса линзы ( $f_2 = 2F$ ), и получится два изображения источника

(в каждой из половинок линзы). Схема опыта Бийе представлена на рис. 10.12.

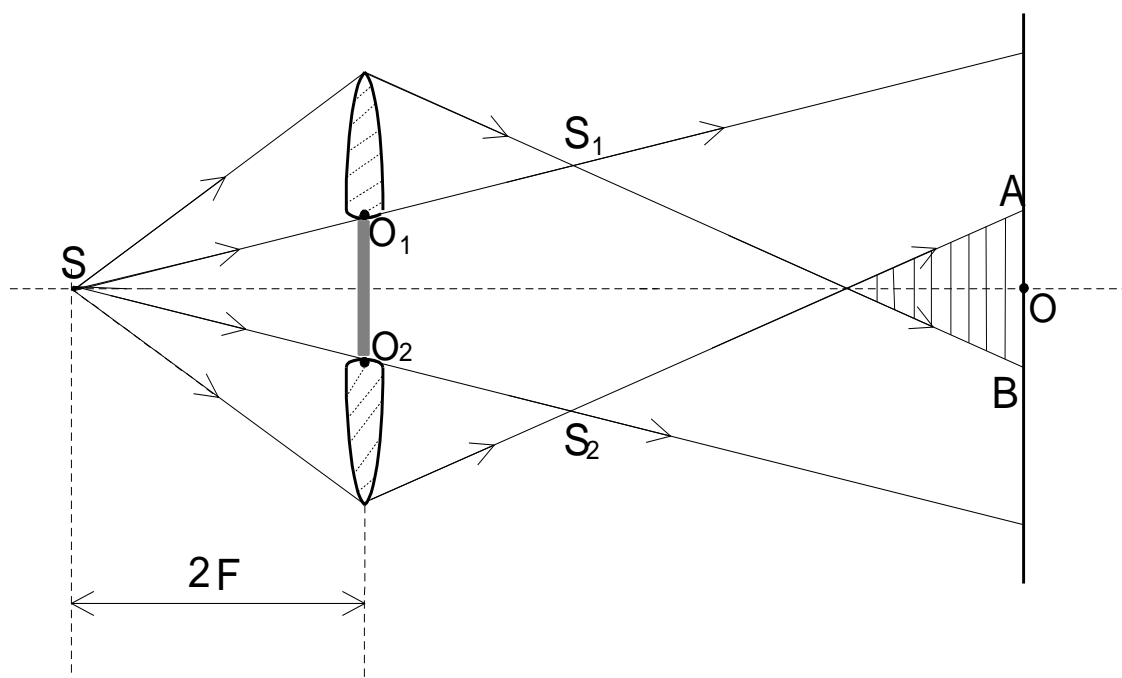


Рис. 10.12

$S_1$  и  $S_2$  – действительные изображения источника. В области АВ на экране будут пересекаться лучи от вторичных источников  $S_1$  и  $S_2$  и там возможна интерференция, естественно, при соблюдении условия, что  $\Delta < l_{\text{ког}}$ .

Проведем расчет интерференционной картины, предположив, что точечные монохроматические источники с длиной волны  $\lambda$  находятся на расстоянии  $d$  друг от друга и на расстоянии  $L \gg d$  от экрана, на котором наблюдается интерференционная картина (см. рис. 10.13).

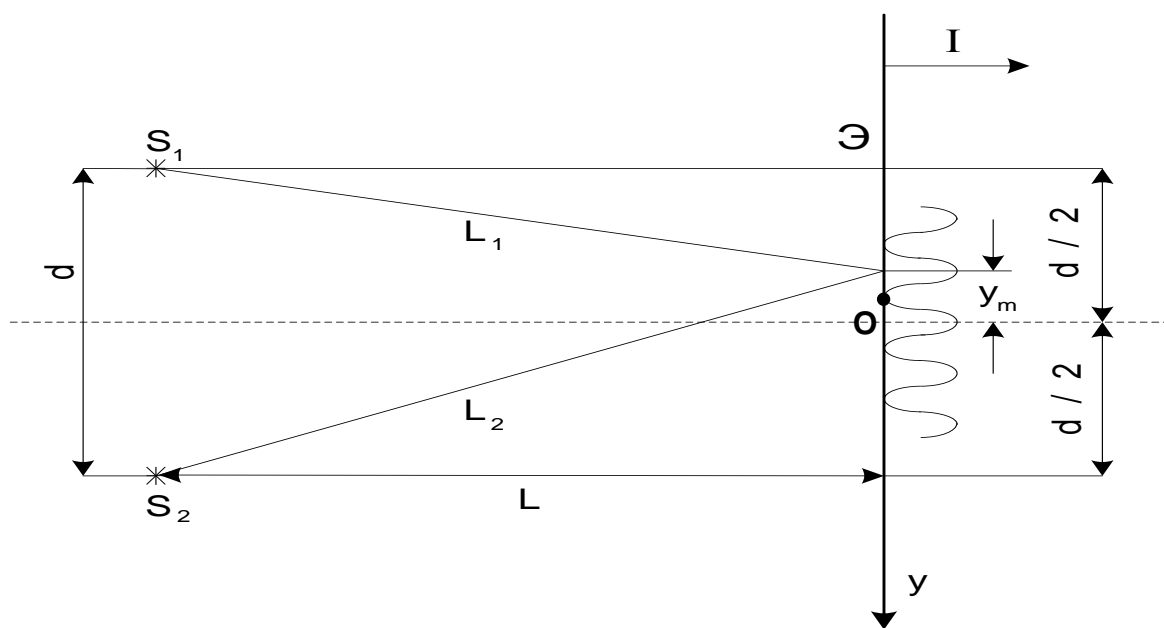


Рис. 10.13

Представленный на рис. 10.13 график  $I(y)$  характеризует распределение интенсивности света по экрану, где  $y_m$  – расстояние между двумя ближайшими максимумами. На рисунке видно, что

$$L_2^2 = L^2 + \left(\frac{d}{2} + y_m\right)^2, \quad L_1^2 = L^2 + \left(\frac{d}{2} - y_m\right)^2, \quad \text{откуда}$$

$$L_2^2 - L_1^2 = (L_2 + L_1)(L_2 - L_1) = 2y_m d.$$

Поскольку  $L \gg d$ , то  $L_2 + L_1 \approx 2L$ , а  $L_2 - L_1 = \Delta$  определяет разность хода от источников до точки наблюдения:

$$2L \cdot \Delta = 2y_m \cdot d, \quad \text{откуда } y_m = L\Delta / d. \quad (10.8)$$

Так как мы выбрали  $y_m$  как расстояние между нулевым максимумом, когда  $\Delta = 0$ , и первым максимумом, для которого  $\Delta = \lambda$ , то из (10.8) следует, что

$$y_m = \lambda \frac{L}{d}. \quad (10.9)$$

Между двумя максимумами интенсивности света находится минимум, соответствующий разности хода лучей  $\Delta = \lambda/2$ .

Соотношение (10.9) может быть использовано для определения длины волны монохроматического источника по измерению на экране периода интерференционной картины, если известны  $d$ ,  $y_m$  и  $L$ . Аналогичное рассмотрение для Опыта Юнга приведено в [1, 5].

### Локализация полос интерференции. Кольца Ньютона

Для наблюдения описанной выше интерференции, наблюдаемой в области пересечения пучков света от двух когерентных точечных источников, не требуется дополнительных оптических приборов. Картина интерференции называется нелокализованной.

Если происходит интерференция света от протяженных источников, то для наблюдения ее необходимо какое-то фокусирующее устройство, собирающее параллельные лучи в точку. Тогда оптический прибор или глаз человека наведены на поверхность, где есть параллельные лучи с различной разностью хода. Такие интерференционные полосы называются **локализованными**.

Рассмотрим интерференцию света на примере колец Ньютона (опыт, осуществленный Ньютоном в 1665 г.)

На плоскопараллельную стеклянную пластинку положена плосковыпуклая линза большого радиуса кривизны. Свет от протяженного монохроматического источника, отражаясь от полупрозрачного зеркала, падает нормально на плоскую поверхность плосковыпуклой линзы. Интерференция происходит на тонком воздушном клине между линзой и пластинкой и локализуется на выпуклой поверхности линзы. Отраженный свет, проходя через полупрозрачное зеркало, фокусируется на экране (рис.10.14).



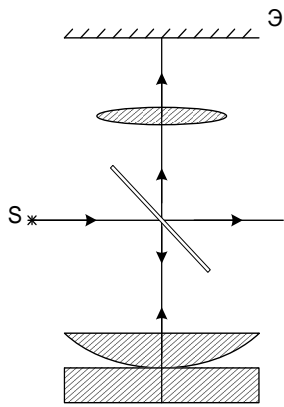


Рис. 10.14

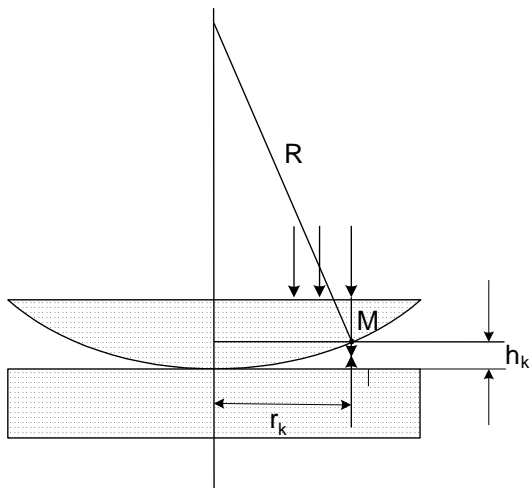


Рис. 10.15

Интерференционная картина представляет собой чередующие темные и светлые концентрические кольца (с темным пятном в центре), так называемые интерференционные кривые равной толщины, поскольку результат интерференции получается идентичным там, где толщина слоя одинакова.

Найдем радиус  $k$ -го темного кольца  $r_k$  (рис. 10.15). Интерферировать будут лучи, для которых разность хода  $\Delta < \ell_{\text{ког}}$ . Разность хода второго луча по отношению к первому определяется удвоенной шириной воздушного зазора и «потерей» полуволны  $\Delta = 2h_k + \lambda/2$ , так как отражение происходит от оптически более плотной среды. Для темного кольца разность хода равна нечетному числу полуволн

$$\Delta = 2h_k + \lambda/2 = (2k + 1)\lambda/2, \text{ откуда } h_k = k \cdot \lambda/2, (k = 1; 2; 3 \dots).$$

Радиус  $k$ -го темного кольца в отраженном свете определяется из геометрических соотношений:

$$r_k = \sqrt{R^2 - (R - h_k)^2} \approx \sqrt{2Rh_k} = \sqrt{k\lambda R}. \quad (10.10)$$

### Дифракция света. Принцип Гюйгенса-Френеля. Дифракция Френеля на круглом отверстии

Под дифракцией света понимают всякое отклонение света от прямолинейного распространения, если это отклонение не связано с явлениями геометрической оптики (отражением, преломлением и т.д.).

Френель создал теорию, объясняющую это явление, и сформулировал принцип, который получил название принципа Гюйгенса-Френеля, поскольку в нем использован ряд идей, высказанных ранее Гюйгенсом. Он состоит в следующем: *каждая точка волнового фронта является источником вторичных сферических когерентных волн, распространяющихся только вперед; вторичные волны при наложении интерферируют друг с другом.* Результат интерференции вторичных волн и определяет направление распространения света.

Принцип Гюйгенса-Френеля в рамках волновой теории должен был объяснить **прямолинейное распространение света**. Френель решил эту задачу, рассмотрев интерференцию вторичных волн и применив прием, получивший название **метод зон Френеля**.

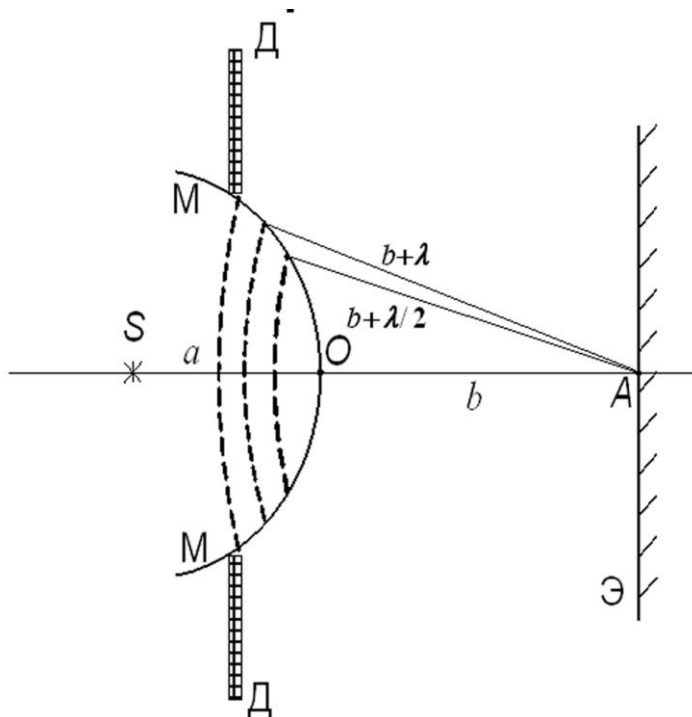


Рис.10.16

Найдем в точке  $A$  амплитуду  $E$  световой волны (см.(10.5)), распространяющейся от точечного источника  $S$  через круглое отверстие диафрагмы ДД (см. рис. 10.16). Для этого рассмотрим поверхность волнового фронта  $MM$  на расстоянии  $a$  ( $SO$ ) от источника и  $b$  ( $OA$ ) от точки наблюдения  $A$ . Разобьем поверхность  $MM$  на кольцевые зоны таким образом, чтобы расстояние от краев зоны до точки  $A$  отличалось на  $\lambda/2$  (штриховые линии). Для этого из точки  $A$  проводятся сферы радиусами  $b, b + \lambda/2, b + \lambda, b + 3\lambda/2 \dots b + m\lambda/2$ . Площади зон при таком разбиении оказываются одинаковыми ( $S_i = \pi ab / (a + b)$ ), но колебания от соседних зон проходят до точки  $A$  расстояния, отличающиеся на  $\lambda/2$ , и в точку  $A$  они приходят в противофазе. При наложении такие колебания будут взаимно ослаблять друг друга. Амплитуда колебаний  $E$  в точке  $A$  на экране  $\mathcal{E}$  может быть записана как:

$$E = E_1 - E_2 + E_3 - E_4 + \dots \pm E_m. \quad (10.11)$$

Однако интенсивность колебаний в точке  $A$  убывает с увеличением номера зоны, так как увеличивается расстояние от точки  $A$  до соответствующей зоны:

$$E_1 > E_2 > E_3 > \dots > E_m.$$

Можно приближенно считать, что амплитуда колебаний, вызванных какой-либо  $m$ -зоной, равна полусумме колебаний, вызванных  $(m - 1)$  и  $(m + 1)$  зонами:

$$E_m = \frac{E_{m-1} + E_{m+1}}{2}.$$

Исходя из этого, соотношение (10.11) можно преобразовать к виду:

$$E = \frac{E_1}{2} + \left( \frac{E_1}{2} - E_2 + \frac{E_3}{2} \right) + \left( \frac{E_3}{2} - E_4 + \frac{E_5}{2} \right) + \dots + \frac{E_m}{2}. \quad (10.12)$$

Все слагаемые в скобках (5.12) равны нулю, и результирующая амплитуда колебаний  $E$  в точке  $A$  равна:

$$E \cong \frac{E_1}{2} + \frac{E_m}{2}, \text{ если } m - \text{ нечетное.}$$

В общем случае:

$$E \cong E_1/2 \pm E_m/2, \quad (10.13)$$

где «плюс» соответствует нечетному числу зон, «минус» – четному.

**Результаты применения метода зон Френеля:**

1. Из (10.13) следует, что дифракционная картина вблизи точки  $A$  будет наблюдаться тогда, когда  $m$  **конечно**. Для наблюдения дифракции Френеля на круглом отверстии диафрагмы ДД в точке  $A$  устанавливают экран Э (рис. 10.16) перпендикулярно линии  $SA$ . Пусть на размере отверстия диафрагмы укладывается четное число зон Френеля. Тогда в точке  $A$  наблюдается темное пятно, так как волны соседних зон ослабляют друг друга. На экране Э это пятно окружено чередующимися светлыми и темными кольцами, так как оптическая установка на рис. 10.16 имеет осевую симметрию относительно линии  $SA$ . Если на размере отверстия диафрагмы укладывается нечетное число зон Френеля, то в точке  $A$  наблюдается светлое пятно, окруженное чередующимися темными и светлыми кольцами.

2. Если же  $m \rightarrow \infty$ , то  $E \approx E_1/2$ , то есть амплитуда колебаний в точке  $A$  равна половине амплитуды световой волны, излучаемой первой зоной Френеля.

Таким образом, действие всего волнового фронта в точке  $A$  при  $m \rightarrow \infty$  (диафрагма ДД отсутствует) сводится к действию его малого участка. Оценим площадь первой зоны Френеля для  $\lambda = 500$  нм,  $a = b = 1$  м:

$$S_1 = \frac{\pi a \cdot b}{a + b} \lambda \leq 10^{-6} \text{ м}^2 = 1 \text{ мм}^2.$$

Поэтому площадь действующей части фронта волны, в соответствии с (10.13), равна  $S_1/2$ , то есть меньше  $1 \text{ мм}^2$ . Это означает, что распространение света от точечного источника  $S$  к точке  $A$  происходит так, как если бы световая волна проходит внутри очень узкого канала вдоль  $SA$ , т.е. **прямолинейно**. Этот вывод является объяснением **прямолинейности распространения света в волновой оптике**.

## Дифракция Фраунгофера. Дифракционная решетка

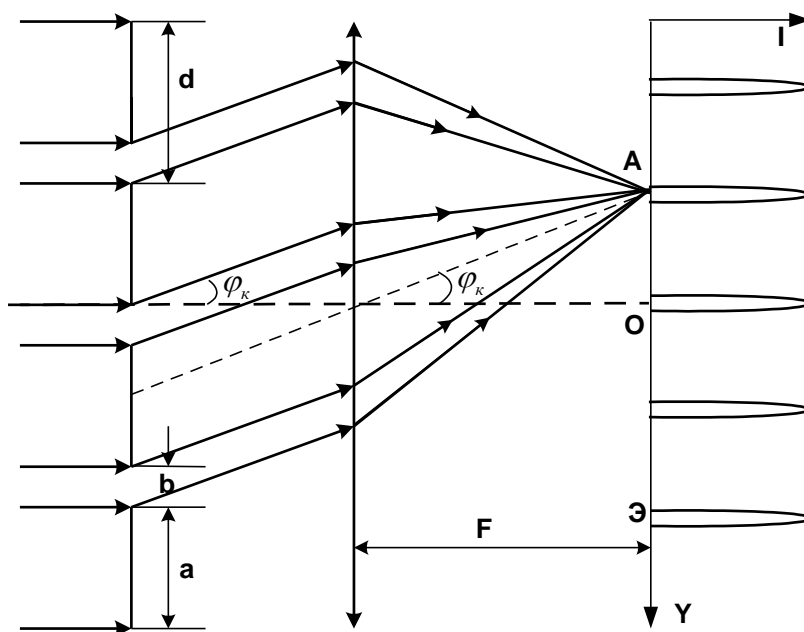


Рис. 10.17

Дифракция Фраунгофера наблюдается в случае падения на объект (отверстие) плоской монохроматической волны, когда расстояние до экрана стремится к бесконечности. Поэтому для наблюдения этой дифракции на экране, расположенном на конечном расстоянии от объекта, перед ним на фокусном расстоянии устанавливается собирающая линза. Фраунгофер впервые применил этот метод наблюдения дифракции и создал первые дифракционные решетки.

Такая решетка на пропускание света представляет собой систему параллельных щелей шириной  $b$ , разделенных непрозрачными промежутками шириной  $a$  (рис. 10.17). Величина  $d=a+b$  называется постоянной решетки (или периодом). Обратная ей величина  $n=1/d$  определяет число штрихов на единицу длины. При длине решетки  $L$  полное число штрихов  $N=nL$ . Хорошие современные решетки имеют до 2000 штрихов на 1 мм при общей длине 250 мм. Таким образом, полное число штрихов достигает значение  $N=5 \cdot 10^5$ !

Пусть на решетку нормально падает плоская монохроматическая волна с длиной волны  $\lambda$ . Разность хода между колебаниями от соседних щелей (рис. 10.17), которая возникает при распространении света за решеткой по направлению  $\varphi_k$ , равна

$$\Delta = d \sin \varphi_k \quad (10.14)$$

В точке наблюдения  $A$  на экране будет наблюдаться максимум освещенности, если волны от щелей придут в нее в фазе, то есть  $\Delta = k \lambda$ , где  $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Тогда, сравнивая это  $\Delta$  с (10.14), получим условие наблюдения главных максимумов дифракционной решетки:

$$d \sin \varphi_k = k \lambda, \text{ где } k=0, \pm 1, \pm 2. \quad (10.15)$$

Интенсивность света в главных максимумах равна  $N^2 I_m$ , где  $I_m$  – интенсивность света от одной щели при  $\varphi_k=0$ . Для небольших углов дифракции ( $\sin \varphi_k \sim \varphi_k$ ) ширина главного максимума на экране  $\Delta h$  равна

$$\Delta h = 2F \Delta \varphi_k = \lambda / Nd, \quad (10.16)$$

где  $\Delta \varphi_k$  – угол между направлением на главный максимум и первый его минимум;  $F$  – фокусное расстояние линзы.

Видно, что ширина главного максимума не зависит от его номера  $k$  и тем меньше, чем больше число  $N$  штрихов в решетке. На экране будут наблюдаться нулевой максимум в точке  $O$  для  $\varphi_k=0$  и  $k=0$ , и симметрично расположенные относительно точки  $O$  максимумы первого и более порядков, удовлетворяющие условию:

$$\sin \varphi_k = k \lambda / d.$$

Если дифракционную решетку осветить параллельным пучком естественного света (например, лампы накаливания), то на экране будет наблюдаться белый свет в точке  $O$  (нулевой максимум) и спектры разложения белого света от фиолетового до красного в местах расположения главных максимумов решетки 1-ого и более высоких порядков. При этом спектральная разрешающая способность решетки определяется соотношением

$$\lambda / \Delta \lambda = kN, \quad (10.17)$$

то есть определяется общим числом штрихов  $N$ , умноженным на порядок  $k$  дифракционного спектра.

### Примеры решения задач.

**Задача 10.1.** Предмет находится на расстоянии  $D = 120$  см от экрана. Если между предметом и экраном поместить собирающую линзу (ближе к предмету), то на экране получается увеличенное изображение. Если передвинуть линзу на расстояние  $b = 90$  см (ближе к экрану), то на экране вновь появится изображение предмета, но уменьшенное. Найти фокусное расстояние линзы  $F$ .

#### Анализ и решение

Сделаем чертеж для двух ситуаций а) и б), описанных в задаче (рис.10.18). Очевидно, что

$$d_1 + d_2 = d'_1 + d'_2 = D.$$

Но расстояния  $d_1$  и  $d_2$  (так же, как  $d'_1$  и  $d'_2$ ) связаны формулой тонкой линзы:

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{F}; \quad \frac{1}{d'_1} + \frac{1}{d'_2} = \frac{1}{F}. \quad (1)$$

Поэтому ясно, что в ситуациях а) и б) как расстояния  $d_1$  и  $d'_2$ , так и расстояния  $d_2$  и  $d'_1$  меняются местами, т.е.:

$$d_1 = d'_2, d_2 = d'_1. \quad (2)$$

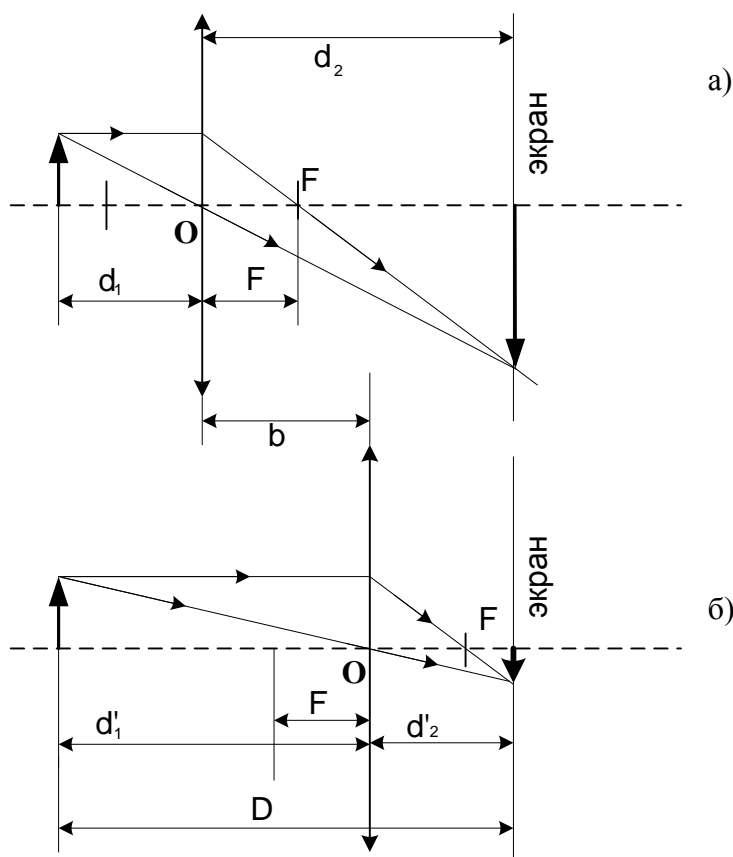


Рис. 10.18

Рассмотрение чертежа показывает, что

$$d_1 + d_2 = D, \quad (3)$$

с учетом (2):

$$d_2 - d_1 = b. \quad (4)$$

Из (3) и (4) следует:

$$d_1 = \frac{Db}{2}, \quad d_2 = \frac{Db}{2}.$$

Подставив полученные выражения для  $d_1$  и  $d_2$  в первую из формул (1), выразим искомое фокусное расстояние через данные задачи:

$$F = \frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2} = \frac{(D-b)(D+b)}{4D} = \frac{D^2 - b^2}{4D}. \quad (5)$$

Подставляя численные значения в (5), получим  $F \approx 13,1$  см.

**Задача 10.2.** Два малых отверстия, расстояние между которыми  $d = 1$  мм, освещены монохроматическим светом ( $\lambda = 600$  нм). Как будет

освещаться экран, расположенный на расстоянии  $L = 3\text{ м}$  от пластинки с отверстиями?

### Анализ и решение

Идеализируя задачу, можно считать отверстия точечными когерентными источниками ( $S_1$  и  $S_2$  на рис.10.19, а). Световые волны от этих источников интерферируют в пространстве между источником и экраном. Геометрические места точек, в которых будут наблюдаться интерференционные максимумы (или минимумы), будут представлять собой гиперboloиды вращения (в сечении плоскостью рисунка – гиперболы); на рисунке указаны линии максимумов, соответствующие постоянным разностям хода ( $\Delta = l_2 - l_1$ ). На экране, расположенном на расстоянии  $L$  перпендикулярно плоскости рисунка, будет наблюдаться цепочка светлых круглых пятен (максимумов освещенности), расстояние между которыми (для центра картины) будет примерно одинаковым. Ширину получившихся таким образом интерференционных полос можно вычислить, рассмотрев рис. 10.19, б).

В центральной точке  $O$  будет, очевидно, максимум (разность хода равна нулю). Следующий максимум (разность хода равна  $\lambda$ ) будет наблюдаться на расстоянии  $\Delta x$ :

$$\Delta x = L \cdot \operatorname{tg} \varphi \approx L \cdot \varphi. \quad (1)$$

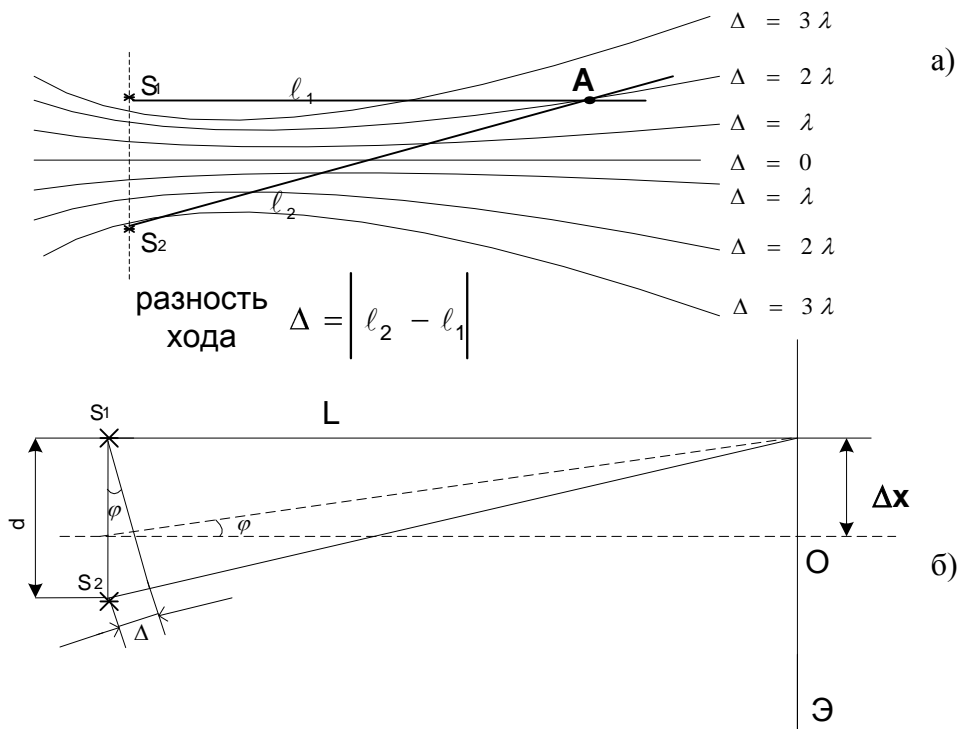


Рис.10.19

Разность хода можно выразить через  $d$  и  $\varphi$ :

$$\Delta = d \cdot \sin \varphi \approx d \cdot \varphi. \quad (2)$$

В результате получим, учитывая, что для первого максимума  $\Delta = \lambda$ , выражение для расстояния между максимумами или ширины интерференционной полосы:

$$\Delta x = L \cdot \lambda / d. \quad (3)$$

Итак, в центре экрана будет наблюдаться светлое пятно; ближайшие светлые пятна будут наблюдаться на расстояниях:

$$\begin{aligned} x_1 &= \Delta x = L \cdot \lambda / d = 3 \cdot 6 \cdot 10^{-7} / 10^{-3} \text{ м} = 1,8 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 1,8 \text{ мм}, \\ x_2 &= 2\Delta x = 3,6 \text{ мм}, \\ x_3 &= 3\Delta x = 5,4 \text{ мм}. \end{aligned}$$

**Задача 10.3.** Линза с радиусом кривизны  $R = 9 \text{ м}$ , лежащая на пластинке, освещается монохроматическим источником света. В центре наблюдаемой картины – темное пятно. Диаметр четвертого темного кольца  $D$  равен  $9 \text{ мм}$ . Найти длину волны излучения источника.

#### Анализ и решение

Сделаем рисунок, поясняющий возникновение интерференционной картины (колец Ньютона) (рис.10.20).

Из условия задачи (в центре картины – темное пятно) следует, что наблюдение ведется в **отраженном** свете (при наблюдении в **проходящем** свете в центре картины будет светлое пятно).

Запишем разность хода  $\Delta$  между волной 1, отраженной от сферической поверхности в точке М, и волной 2, прошедшей слой воздуха и вернувшейся в точку М после отражения от пластинки:

$$\Delta = 2h_k + \frac{\lambda}{2}, \quad (1)$$

где  $h_k$  – толщина слоя воздуха в данном месте.

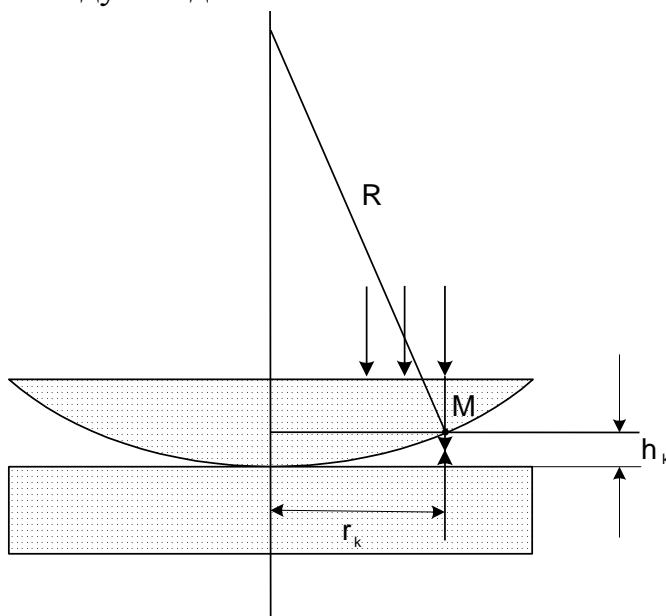


Рис.10.20



Свяжем радиус кольца  $r_k$  с радиусом кривизны линзы и толщиной слоя воздуха в месте образования  $k$ -го кольца. Как видно из рисунка,

$$r_k^2 = R^2 - (R - h_k)^2 = R^2 - R^2 + 2Rh_k - h_k^2.$$

Учитывая, что  $h_k \ll R$ , получим:

$$r_k = \sqrt{2Rh_k}. \quad (2)$$

Для того чтобы наблюдалось **темное** кольцо (интерференционный минимум) с номером  $k$ , разность хода должна быть равна:

$$\Delta = (2k + 1)\lambda / 2. \quad (3)$$

(для центрального темного пятна  $k = 0$ ).

Из (1) и (3) получим:

$$2h_k + \lambda / 2 = (2k + 1)\lambda / 2,$$

откуда

$$h_k = k\lambda / 2.$$

Подставив  $h_k$  в (2), получим:

$$r_k = \sqrt{2Rk\lambda / 2} = \sqrt{Rk\lambda}.$$

Отсюда

$$\lambda = r_k^2 / Rk = D_k^2 / 4Rk.$$

Подставляя числовые значения, получим:

$$\lambda = \frac{9 \cdot 9 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 9 \cdot 4} \text{ м} = \frac{90 \cdot 10^{-7}}{16} \text{ м} \approx 5,9 \cdot 10^{-7} \text{ м} \approx 590 \text{ нм}.$$

**Задача 10.4.** Сколько изображений дает дифракционная решетка, постоянная которой  $d = 2 \text{ мкм}$ , если на нее падает пучок света от гелий-неонового лазера ( $\lambda = 630 \text{ нм}$ )?

### Анализ и решение

Световые волны от лазера дифрагируют на решетке (рис.10.21) и распространяются после нее только в определенных направлениях, удовлетворяющих условию:

$$d \cdot \sin \varphi_k = k\lambda \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots), \quad (1)$$

где  $d$  – постоянная (период) решетки;  $\varphi_k$  – угол отклонения дифрагированной волны;  $\lambda$  – длина волны.

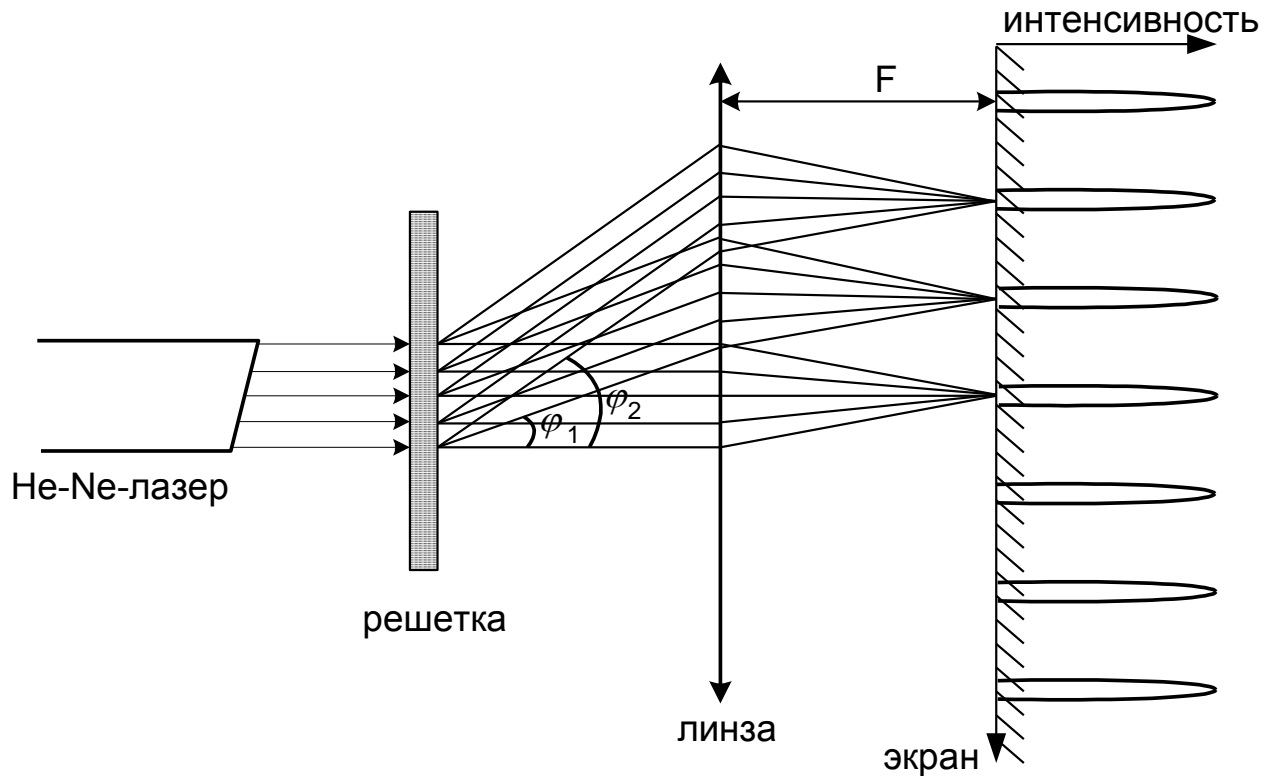


Рис. 10.21

Каждая из дифрагированных волн способна дать изображение лазерного пучка (в виде ярко светящейся точки на экране) в фокальной плоскости линзы, поставленной на пути этой волны. Число таких изображений заведомо ограничено, так как угол  $\varphi_k$  не может превысить значения  $\varphi_{k \max} = \pi / 2$ .

Следовательно,

$$d \cdot \sin \varphi_{\max} = k_{\max} \cdot \lambda, \text{ но } \sin \varphi_{\max} = 1.$$

Отсюда максимально возможное значение  $k$  равно:  $k_{\max} = d / \lambda$ .

Найдем  $k_{\max}$  (оно должно быть целым):

$$k_{\max} = \frac{2 \cdot 10^{-6} \text{ м}}{6,3 \cdot 10^{-7} \text{ м}} \approx 3.$$

Таким образом, возможны следующие значения  $k$ :

$k = 0, \pm 1; \pm 2; \pm 3$ , т.е. рассматриваемая в задаче решетка может дать **семь** изображений лазерного пучка.

# ТЕМА 11

## КВАНТОВАЯ ОПТИКА И ФИЗИКА АТОМА

### § 1 Квантовая оптика

#### Развитие квантовых представлений о свете. Фотоны

К середине XIX века волновая природа света считалась доказанной окончательно. Ее подтверждали явления дифракции, интерференции и др. Однако в рамках волновой теории света не удавалось объяснить особенности излучения нагретых тел (тепловое излучение). Было установлено, что тело, нагретое до температуры  $T \geq 1000$  К, светится, т.е. излучение его приходится и на видимый диапазон электромагнитных волн (рис. 10.1). Для объяснения особенностей теплового излучения Планку в 1900 году пришлось отойти от классических представлений и предположить, что излучение и поглощение света веществом происходит не непрерывно, а конечными порциями, или **квантами**. Энергия кванта пропорциональна частоте колебаний:

$$E = h \cdot \nu, \quad (11.1)$$

где  $h$  – универсальная постоянная, впоследствии получившая название постоянной Планка;  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж.с.

Планк предполагал, что квантовые свойства света проявляются только при взаимодействии света с веществом. Распространение же света в пространстве происходит непрерывно и описывается классическими уравнениями Максвелла. Однако Эйнштейн в 1905 году пришел к представлению о том, что и при распространении в пространстве свет ведет себя как совокупность частиц. Энергия каждой частицы определяется формулой Планка (11.1). Эти частицы в дальнейшем получили название **квантов света**, или **фотонов**.

На фотоны нельзя смотреть как на обычные частицы (корпускулы), аналогичные материальным точкам классической механики. Это видно хотя бы из того, что фотонам свойственны явления интерференции и дифракции, т.е. они обладают не только корпускулярными, но и волновыми свойствами. Такая особенность фотонов называется **корпускулярно-волновым дуализмом**. Корпускулярно-волновой дуализм присущ не только фотонам, но и всем частицам микромира (электронам, протонам и др.). Корпускулярно-волновой дуализм невозможно истолковать в духе классической физики, точно так же как человеческое воображение не в состоянии создать образ, одновременно обладающий и свойствами корпускулы, и свойствами волны. Природа богаче человеческого воображения! Применительно к фотону корпускулярно-волновой дуализм проявляется в том, что энергию его можно представить не только соотношением (11.1), но и соотношением:

$$E = pc, \quad (11.2)$$

т.е. рассматривать его как частицу с импульсом  $p$ , движущуюся со скоростью  $c$ . Заметим, что фотон всегда движется со скоростью света. Наличие импульса фотона проявляется, например, в существовании светового давления.

### Фотоэффект и уравнение Эйнштейна

Фотоэффектом называется испускание электронов веществом под действием света. Это явление было открыто Г.Герцем в 1887 году и систематически исследовано Л.Г. Столетовым в 1888-1889 годах. Прежде чем мы изложим законы фотоэффекта, сформулированные в результате его экспериментального изучения, рассмотрим принципиальную схему опыта (рис. 11.1) и некоторые результаты (рис 11.2).

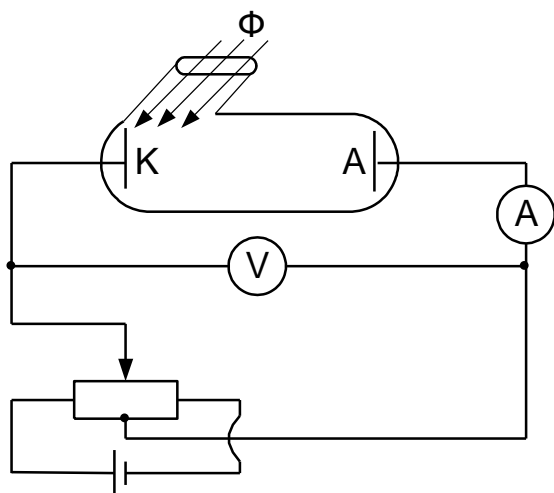


Рис. 11.1

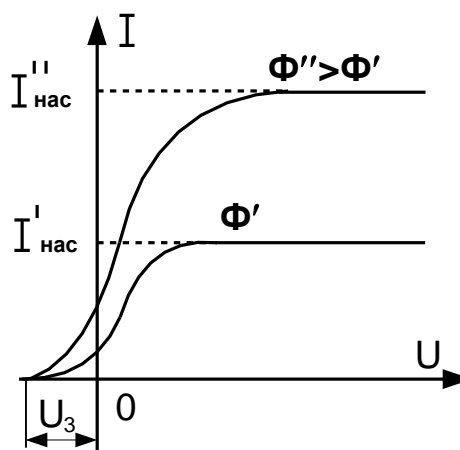


Рис.11.2

Свет, проникающий через кварцевое окошко, освещает катод К. Электроны, испущенные вследствие фотоэффекта, перемещаются под действием электрического поля к аноду А (если потенциал анода выше потенциала катода). В результате в цепи течет ток, измеряемый амперметром. Вольтамперная характеристика (ВАХ), полученная на таком приборе, представлена на рис. 11.2 для двух интенсивностей монохроматического светового потока  $\Phi$  частоты  $\nu$ .

Характерной особенностью ВАХ является наличие тока насыщения  $I_{нас}$ , который пропорционален  $\Phi$ . Это означает, что все электроны, испущенные катодом при  $\Phi = const$ , попадают на анод.

Если потенциал анода ниже потенциала катода, то при некотором его значении  $U_z$  (задерживающий потенциал)  $I = 0$ . Это означает, что даже электронам, обладающим при вылете из металла наибольшей энергией, не удастся преодолеть задерживающее электрическое поле и достигнуть анода. Поэтому можно записать, что

$$mv_{max}^2 / 2 = eU_3. \quad (11.3)$$

Из рис. 11.2 видно, что  $U_3$  не зависит от  $\Phi$ . Это, а также практическая безынерционность фотоэффекта и тот факт, что при уменьшении частоты света, начиная с некоторой  $\nu_0$ , фотоэффект не возникал ни при каких  $U$  и  $\Phi$ , не могли найти объяснения в рамках классической физики.

В 1905 году Эйнштейн показал, что закономерности фотоэффекта легко объясняются, если рассмотреть взаимодействие электрона с фотоном. Фотон с энергией  $h\nu$  поглощается электроном. Эта энергия затрачивается на работу выхода  $A$  и сообщение кинетической энергии электрону:

$$h\nu = A + mv^2/2. \quad (11.4)$$

Работой выхода называется наименьшая энергия, которую необходимо сообщить электрону для того, чтобы удалить его из твердого или жидкого тела в вакуум. Выражение (11.4) называется **уравнением Эйнштейна**.

Из (11.4) следует, что, если работа выхода превышает энергию кванта  $h\nu$ , электроны не могут покинуть металл, следовательно, для возникновения фотоэффекта необходимо выполнение условия

$$h\nu \geq h\nu_0 = A. \quad (11.5)$$

Частота  $\nu_0$ , или длина волны  $\lambda_0 = c/\nu_0$ , называется **красной границей фотоэффекта**.

По величине  $\nu_0$  можно найти работу выхода для каждого материала. Действительно, исходя из (11.3) и (11.4), можно записать:

$$h\nu = A + eU_3. \quad (11.6)$$

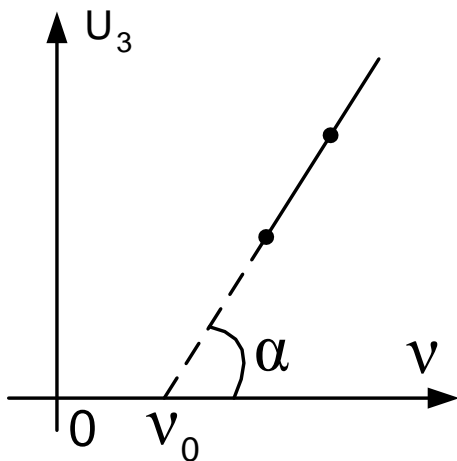


Рис. 11.3

Тогда если измерить  $U_3$  для нескольких частот  $\nu$ , то по графику  $U_3 = f(\nu)$ , представленному на рис. 11.3, можно найти  $\nu_0$  и  $h$  ( $\operatorname{tg} \alpha = h/e$ ),  $e$  — заряд электрона и рассчитать работу выхода:  $A = h\nu_0$ . Заметим в заключение, что прямая пропорциональность тока насыщения величине светового потока ( $I_{нас} \sim \Phi$ ) также объясняется в рамках теории Эйнштейна.

Действительно, ток насыщения пропорционален числу электронов, высвобожденных светом из металла, т.е. зависит от числа квантов  $N$ , падающих на освещаемую поверхность. Поскольку интенсивность светового потока  $\Phi = N h \nu$ , пропорциональность  $I_{нас} \sim \Phi$  очевидна.

## § 2 Атомная физика

### Опыты Резерфорда. Планетарная модель атома. Теория атома водорода по Бору

Введение квантовых представлений позволило объяснить особенности излучения нагретых тел, фотоэффект и ряд других эффектов, но линейчатые спектры излучения нагретых разреженных газов не поддавались объяснению ни в рамках классической теории, ни в представлении о фотонах.

Закономерности таких спектров были хорошо изучены экспериментально, более того, Ридберг и Ритц нашли эмпирическую закономерность, позволяющую описать одной формулой все возможные длины волн спектральных линий атома водорода:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right), \quad (11.7)$$

где  $R$  – постоянная Ридберга;  $n = 1, 2, 3..$ ;  $m = (n+1), (n+2), (n+3)..$

Модель атома Томсона, полагающая, что атом – это положительно заряженный шар, в котором «плавают» электроны, не могла объяснить линейчатые спектры, поскольку рассчитанные по ней частоты колебаний электронов не отвечали (11.7).

Проводя опыты по рассеянию  $\alpha$  - частиц в тонких слоях вещества, Резерфорд показал, что атом состоит из положительно заряженного ядра, окруженного «облаком» электронов. Размеры ядра существенно меньше размеров атома, но в нем сосредоточена практически вся масса атома. Это так называемая «планетарная модель атома», подобная нашей Солнечной системе.

Атом Резерфорда с точки зрения классической физики был неустойчив, поскольку вращающийся вокруг ядра электрон должен излучать электромагнитную волну (как всякий заряд, движущийся с ускорением). Уменьшение вследствие этого энергии электрона должно за время  $\sim 10^{-10}$  с приводить к падению электрона на ядро, что противоречит хорошо известной из опытов устойчивости атомов.

В 1913 году Н. Бор объяснил загадку линейчатых спектров, основываясь на резерфордовской модели атома, но введя постулаты, противоречащие классическим представлениям.

С классической точки зрения энергия электрона в атоме водорода при вращении электрона по круговой орбите радиуса  $r$  в поле положительно заряженного ядра равна:

$$W = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (11.8)$$

где  $e$ ,  $m$ ,  $v$  соответственно заряд, масса и скорость электрона.

При этом нормальное ускорение электрона создается за счет кулоновского взаимодействия его с ядром:

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r. \quad (11.9)$$

Подставив (11.9) в (11.8), получим выражение для  $W$  и  $\omega$  – угловой частоты вращения электрона:

$$W = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r}, \quad (11.10)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m r^3}}. \quad (11.11)$$

Никаких ограничений на  $r$ ,  $W$ , и  $\omega$  не накладывается.

Бор, сохранив силовые и энергетические характеристики движения, ввел ограничивающие это движение постулаты.

1. В атоме существуют стационарные (устойчивые) орбиты, двигаясь по которым электрон не излучает. Стационарные орбиты удовлетворяют условию: момент механического импульса электрона кратен  $h/2\pi$ :

$$mvr = n \frac{h}{2\pi} = n \cdot \hbar, \quad (11.12)$$

где  $\hbar = h/2\pi$ ,  $h$  – постоянная Планка;  $n = 1, 2, 3 \dots$  - квантовое число.

В этих состояниях энергия электрона не изменяется со временем.

Выражение для энергии электрона в атоме (11.10) с учетом (11.12) приобретает совершенно иной вид:

$$W = -\frac{e^4 m}{8\epsilon_0^2} \cdot \frac{1}{\hbar^2 n^2}. \quad (11.13)$$

Поскольку  $n$  имеет дискретные значения, то **спектр** энергий электрона в атоме **дискретный**. Иначе говоря, энергия электрона в атоме квантована.

2. При переходе из одного стационарного состояния в другое атом излучает или поглощает фотон  $h\nu$ ; частота фотона определяется законом сохранения энергии:

$$W_m - W_n = h\nu. \quad (11.14)$$

Если  $m > n$ , происходит излучение фотона, и электрон переходит с более удаленной от ядра орбиты на более близкую; если  $m < n$ , атом поглощает фотон, вследствие чего электрон переходит с более близкой к ядру орбиты на более удаленную.

Частота излучаемой электромагнитной волны, исходя из (11.13 и 11.14) равна:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{e^4 m}{8\epsilon_0^2 \hbar^3} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) = R_{meop} \cdot c \cdot \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right). \quad (11.15)$$

Выражение (11.15) подобно (11.7), при этом совпадают теоретическое и экспериментальное значения постоянной Ридберга ( $R_{теор} = R$ ).

Вместо (11.15) можно записать выражение для энергии кванта излучения:

$$h\nu = Ry \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right), \quad (11.16)$$

где  $n=1, 2, 3, \dots$ ;  $m=n+1, n+2, \dots$ ;  $Ry = R \cdot h \cdot c = 13,6$  эВ – «энергетический Ридберг», в отличие от спектроскопического Ридберга –  $R$  (11.7).

На рис. 11.4 схематически представлены несколько «уровней энергии» атома водорода и возможные переходы электрона в атоме. Горизонтальные линии отвечают за пять «нижних» состояний электрона в атоме с  $n=1 \div 5$ , а «верхняя» с  $n=\infty$  соответствует состоянию свободного электрона с нулевой кинетической энергией. Вертикальные стрелки демонстрируют переходы электронов с «верхних» состояний на «нижние» для приведенных  $n$ . Остальные состояния с  $5 < n < \infty$  указаны штрихами, а переходы с них – точками.

Энергия квантов излучения (11.16) равна разностям энергий, освобождающихся при переходах электронов с более высоких энергетических состояний в более низкие. Длина волны излучения для серии Лаймана ( $n=1$ ) соответствует ультрафиолетовой области спектра электромагнитных волн, серии Бальмера ( $n=2$ ) – видимой, серии Пашена ( $n=3$ ) – инфракрасной (рис.11.4).

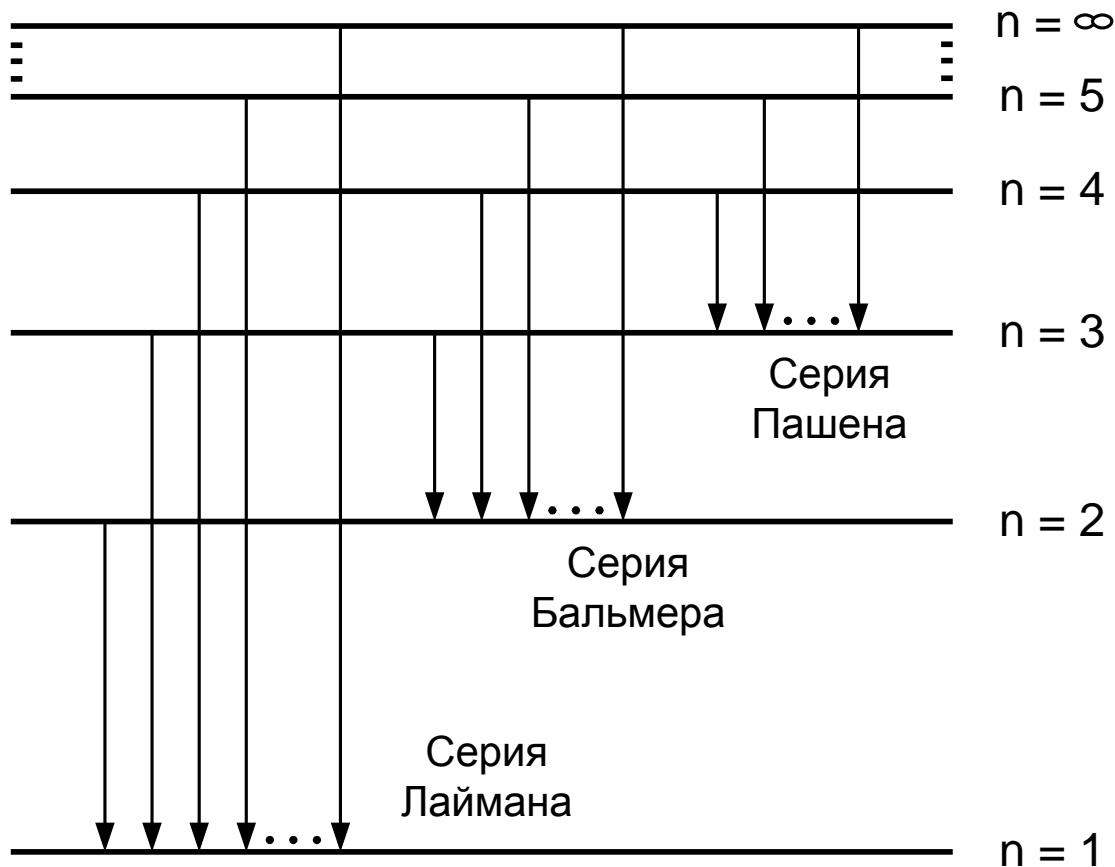


Рис. 11.4



## Примеры решения задач

**Задача 11.1.** Красная граница фотоэффекта из некоторого металла соответствует  $\lambda_0 = 300$  нм. Найти работу выхода электрона из металла и максимальную скорость электронов, вырываемых из металла светом с длиной волны  $\lambda = 150$  нм.

### Анализ и решение

Запишем уравнение Эйнштейна для фотоэффекта:

$$h\nu = h \frac{c}{\lambda} = A + \frac{m\nu_{\max}^2}{2}. \quad (1)$$

Работу выхода  $A$  выразим через величину  $\lambda_0$ , соответствующую красной границе.

$$A = h \frac{c}{\lambda_0}. \quad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что  $h \frac{c}{\lambda} - h \frac{c}{\lambda_0} = \frac{m\nu_{\max}^2}{2}$ , откуда

$$\nu_{\max} = \sqrt{\frac{2}{m} hc \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right)}. \quad (3)$$

Подстановка численных значений величин, входящих в (2) и (3), дает:

$$A = 6,63 \cdot 10^{-34} \cdot \frac{3 \cdot 10^8}{300 \cdot 10^{-9}} = 6,63 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} \cong 4,1 \text{ эВ}.$$

(Внесистемная единица энергии электрон-вольт равна энергии, приобретаемой электроном с зарядом  $1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл, прошедшим разность потенциалов в 1 В;  $1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$ .)

$$\nu_{\max} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 \left( \frac{10^9}{150} - \frac{10^9}{300} \right)}{0,91 \cdot 10^{-31}}} = 3,8 \cdot 10^6 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

**Задача 11.2.** На фотоэлемент падает световой поток  $\Phi = 1$  лм, ток насыщения равен  $I = 12$  мкА. Найти чувствительность фотоэлемента и квантовый выход фотоэффекта, т.е. отношение числа фотоэлектронов к полному числу фотонов, попавших на фотокатод. Среднее значение коэффициента перевода световых единиц в энергетические  $A_{cp} = 4,35 \cdot 10^{-3}$  Вт/лм.

### Анализ и решение

Чувствительность фотоэлемента  $\gamma$  определяется отношением тока насыщения к величине светового потока:

$$\gamma = \frac{I}{\Phi A_{cp}} = \frac{12 \cdot 10^{-6}}{1,4,35 \cdot 10^{-3}} = 2,76 \cdot 10^{-3} \frac{\text{А}}{\text{Вт}}. \quad (1)$$

Квантовый выход фотоэлемента определяется отношением числа электронов, покидающих фотокатод в единицу времени  $n_e$ , к числу фотонов, падающих в единицу времени на фотокатод  $n_\phi$ :

$$\delta = \frac{n_e}{n_\phi}. \quad (2)$$

При этом

$$n_e = I/e, \quad (3)$$

где  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл – заряд электрона.

$$n_\phi = \Phi A_{cp} / \varepsilon_{cp}, \quad (4)$$

здесь  $\varepsilon_{cp}$  – средняя энергия фотона, которая для диапазона видимого света соответствует фотону с длиной волны  $\lambda_{cp} = 550$  нм:

$$\varepsilon_{cp} = hc / \lambda_{cp}. \quad (5)$$

Подставив (3-5) в (2), получаем окончательное выражение для  $\delta$ :

$$\delta = \frac{I \cdot h \cdot c}{e \cdot \Phi \cdot A_{cp} \cdot \lambda_{cp}} = \frac{12 \cdot 10^{-6} \cdot 6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 4,35 \cdot 10^{-3} \cdot 550 \cdot 10^{-9}} = 6,2 \cdot 10^{-3}.$$

**Задача 11.3.** На сколько изменилась кинетическая энергия электрона в атоме водорода при излучении атомом фотона с длиной волны  $\lambda = 486$  нм?

### Анализ и решение

В модели атома Резерфорда – Бора предполагается, что энергия электрона, вращающегося по круговой орбите радиуса  $r$  вокруг ядра, определяется суммой кинетической и потенциальной энергий (см. соотношение (11.8)).

При этом, как следует из (11.8, 11.9 и 11.13), кинетическая энергия электрона, находящегося в квантовом состоянии  $n$ , равна:

$$W_k^n = \frac{e^2 m}{8 \varepsilon_0^2} \cdot \frac{1}{\hbar^2 n^2}. \quad (1)$$

Приведенное выражение, в отличие от (11.13), положительно, а в остальном полностью совпадает. Это неудивительно, так как в атоме Бора

кинетическая энергия вдвое меньше потенциальной энергии притяжения электрона к ядру. Поэтому полная энергия электрона в атоме вдвое меньше потенциальной энергии кулоновского взаимодействия электрона с ядром и имеет отрицательный знак, что соответствует притяжению.

Исходя из вышеизложенного, можно записать, что

$$W_k^n = Ry \cdot 1/n^2. \quad (2)$$

Видно, что чем больше  $n$ , т.е. чем дальше от ядра электрон, тем меньше кинетическая энергия. Изменение кинетической энергии равно:

$$\Delta W_k = Ry \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right). \quad (3)$$

С другой стороны, энергия излученного фотона:

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} = Ry \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right). \quad (4)$$

Из (3) и (4) следует, что  $\Delta W_k = -\frac{hc}{\lambda} = -\frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 10^8}{486 \cdot 10^{-9}} = -4,06 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = -2,54 \text{ эВ}.$

**Задача 11.4.** Найти максимальную и минимальную длины волн спектральных линий водорода в серии Бальмера.

#### Анализ и решение

Излучение атома водорода в видимом диапазоне волн соответствует переходам с более высоких квантовых уровней ( $m \geq 3$ ) на второй уровень ( $n = 2$ ). Тогда максимальная длина волны соответствует переходам между уровнями с  $m = 3$  и  $n = 2$ :

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} = Ry \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right), \text{ откуда } \lambda_{max} = hc / Ry \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) = 656 \text{ нм}.$$

Минимальная длина волны в серии Бальмера соответствует  $m \rightarrow \infty$ , поэтому

$$\lambda_{min} \cong hcn^2 / Ry = 367 \text{ нм}.$$

Эта спектральная линия лежит в ультрафиолетовом диапазоне волн.

Приложение

***Приставки и множители  
для образования десятичных кратных и дольных единиц***

Наименование приставки	Множитель	Наименование приставки	Множитель	Наименование приставки	Множитель
экса (Э)	$10^{18}$	кило (к)	$10^3$	микро (мк)	$10^{-6}$
пета (П)	$10^{15}$	гекто (г)	$10^2$	нано (н)	$10^{-9}$
тера (Т)	$10^{12}$	деци (д)	10	пико (п)	$10^{-12}$
гига (Г)	$10^9$	санти (с)	$10^{-2}$	фемто (ф)	$10^{-15}$
мега (М)	$10^6$	милли (м)	$10^{-3}$	атто (а)	$10^{-18}$

***Греческий алфавит***

БУКВЫ ПРОПИСНЫЕ, СТРОЧНЫЕ	НАЗВАНИЕ БУКВЫ	БУКВЫ ПРОПИСНЫЕ, СТРОЧНЫЕ	НАЗВАНИЕ БУКВЫ
Α,α	альфа	Ν,ν	ни (ню)
Β,β	бета	Ξ,ξ	кси
Γ,γ	гамма	Ο,ο	омикрон
Δ,δ	дельта	Π,π	пи
Ε,ε	эпсилон	Ρ,ρ	ро
Ζ,ζ	дзета	Σ,σ	сигма
Η,η	эта	Τ,τ	тау
Θ,θ	тета	Υ,υ	ипсилон
Ι,ι	йота	Φ,φ	фи
Κ,κ	каппа	Χ,χ	хи
Λ,λ	лямбда	Ψ,ψ	пси
Μ,μ	ми (мю)	Ω,ω	омега

## ЛИТЕРАТУРА

1. Трофимова Т.И. Курс физики. - М.: Академия, 2007.- 432 с.: ил.
  2. Гершензон Е.М., Малов Н.Н., Мансуров А.Н. Механика. - М.: Академия, 2001.-384 с.: ил.
  3. Гершензон Е.М., Малов Н.Н., Мансуров А.Н. Молекулярная физика. - М.: Академия, 2000.-272 с.: ил.
  4. Гершензон Е.М., Малов Н.Н., Мансуров А.Н. Электродинамика. - М.: Академия, 2002.- 352 с.: ил.
  5. Гершензон Е.М., Малов Н.Н., Мансуров А.Н. Оптика и атомная физика. - М.: Академия, 2000.- 408 с.: ил.
- 

*Учебное издание*

Александров Владимир Николаевич,  
Каменецкая Маргарита Самуиловна,  
Смирнов Константин Владимирович

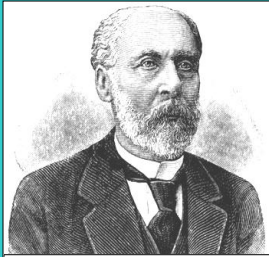
## **ЧАСТНЫЕ ВОПРОСЫ КУРСА ФИЗИКИ**

Учебное пособие

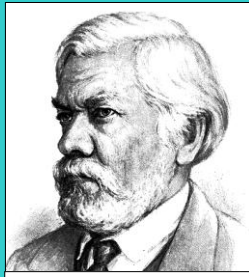
Компьютерная верстка *К.В.Смирнова*

Оформление обложки *В.Н.Александрова и Н.Б.Виноградовой*

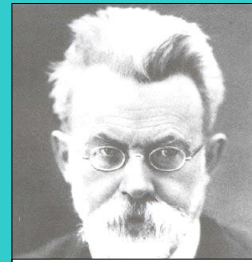
Сдано в печать 12.05.2010  
Формат 60x90/16. Объем 12,5 п.л. Тираж 150 экз.  
Отпечатано в типографии ООО «Постатор»



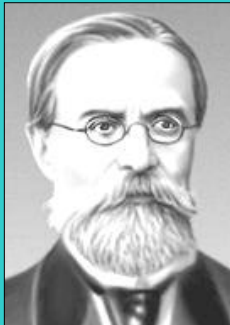
**Ф.А.Бредихин**



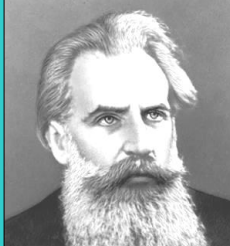
**С.А.Чаплыгин**



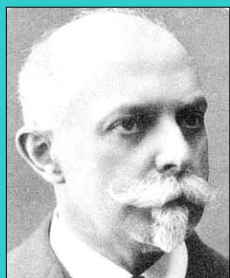
**В.И.Вернадский**



**А.Г.Столетов**



**О.Ю.Шмидт**



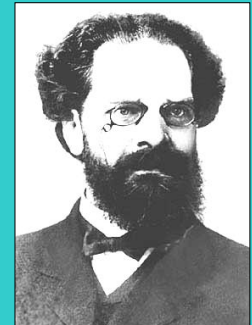
**А.А.Эйхенвальд**



**Э.В.Шпольский**

Свою историю факультет физики и информационных технологий МПГУ ведет с 1872 года, когда были созданы Московские Высшие женские курсы (МВЖК). В их составе было и физико-математическое отделение. Началом существования факультета можно считать 1900 год, когда на МВЖК был создан физико-математический факультет. В разные годы на физико-математическом, затем с 1960 года – физическом, а с 2006 года – факультете физики и информационных технологий работали всемирно известные ученые: С.А.Чаплыгин – директор МВЖК, Ф.А.Бредихин, В.И.Вернадский, А.Г.Столетов, О.Ю.Шмидт, А.В.Цингер, А.А.Эйхенвальд, П.К.Штернберг, Г.С.Ландсберг, П.А.Ребиндер, А.Я.Хинчин,

Н.Н.Малов, лауреат Нобелевской премии И.Е.Тамм, лауреаты Государственной премии Э.В.Шпольский, М.С.Рабинович, Е.М.Лифшиц, Е.М.Гершензон, В.С.Эткин, а также известные всей стране педагоги, авторы школьных и вузовских учебников по физике – Д.И.Сахаров, А.В.Перышкин и С.Е.Каменецкий.



**П.К.Штернберг**



**Г.С.Ландсберг**



**И.Е.Тамм**



**А.В.Перышкин**



**С.Е.Каменецкий**



**Е.М.Лифшиц**