

## Лабораторная работа № 1.9<sup>1)</sup>

### Изучение свойств физического маятника

#### Введение

Физическим маятником называется твердое тело, которое может качаться относительно неподвижной горизонтальной оси. Положение тела в каждый момент времени можно характеризовать углом отклонения  $\varphi$  от положения равновесия (вертикали). И в соответствии с уравнением динамики вращательного движения твердого тела момент  $M$  возвращающей силы можно записать в виде:

$$M = I\varepsilon_{\text{уг}} = I\ddot{\varphi} = -mga \sin \varphi \approx -mga\varphi, \quad (1)$$

где  $I$  - момент инерции маятника относительно оси;  $a$  - расстояние от оси до центра масс маятника. Момент возвращающей силы создается силой тяжести, приложенной в центре масс маятника (знак минус обусловлен тем, что момент  $M$  и препятствует возрастанию угла  $\varphi$ ).

Соотношение (1) можно записать в виде:

$$I\ddot{\varphi} + mga\varphi = 0 \quad \text{или} \quad \ddot{\varphi} + \frac{mga}{I}\varphi = 0.$$

Обозначая  $\omega_0 = \sqrt{\frac{mga}{I}}$ , получим уравнение:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0.$$

Решение этого уравнения известно из кинематики колебательного движения и имеет вид:

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega_0 t + \alpha).$$

Из последнего выражения следует, что при малых колебаниях физический маятник совершает гармонические колебания с циклической частотой  $\omega_0$  и периодом:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mga}} = 2\pi \sqrt{\frac{l_{\text{пр}}}{g}}, \quad (2)$$

где  $l_{\text{пр}} = I/ma$  – называют приведенной длиной физического маятника.

Используя теорему Штейнера, можно получить:

$$I = I_0 + ma^2,$$

где  $I_0$  - момент инерции маятника относительно оси, проходящей через центр масс маятника и параллельной оси подвеса, а  $a$  - расстояние от оси подвеса до центра масс маятника,  $m$  - его масса.

Тогда приведенная длина физического маятника равна:

$$l_{\text{пр}} = a + I_0/(ma). \quad (3)$$

Подставляя (3) в (2), получим:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + ma^2}{mga}} \quad (4)$$

<sup>1)</sup> Подготовлено преподавателями КОЭФ Александровым В.Н., Васильевой И.А. и Коротаевой Е.А.

Исследуем зависимость  $l_{\text{пр}}(a)$ . Возьмем производную от  $l_{\text{пр}}(a)$  по  $a$  и найдем экстремум. Величина  $a_0$ , соответствующая экстремуму (минимуму), равна:

$$a_0 = \sqrt{I_0/m}, \quad (5)$$

а для тонкого однородного стержня:

$$a_0 = L/\sqrt{12} \quad (6)$$

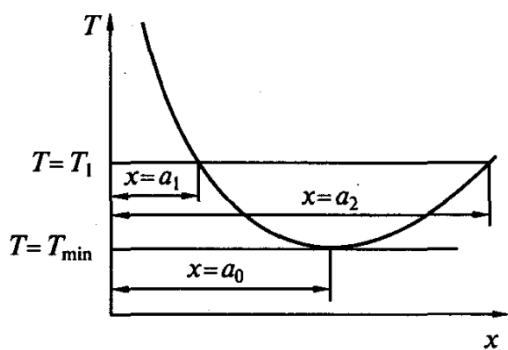


Рис. 9.1.

Из графика зависимости  $T(a)$  можно найти значение  $a_0$ . Заметим, что на нем одному и тому же значению периода соответствуют два разных значения точки подвеса  $a_1$  и  $a_2$ , что в свою очередь говорит о равенстве  $l_{\text{пр}}$  для этих точек. Приравняв  $l_{\text{пр}}$  для  $a_1$  и  $a_2$ , получим соотношение:

$$a_1 \cdot a_2 = a_0^2, \quad (7)$$

а подставив это соотношение в выражение для  $l_{\text{пр}}$ , получим:

$$l_{\text{пр}} = a_1 + a_2, \quad (8)$$

Полученное соотношение (8) дает возможность найти по графику  $l_{\text{пр}}$  и, используя затем формулу(2), найти значения  $g$  ускорения свободного падения.

Этим измерениям посвящена настоящая работа.

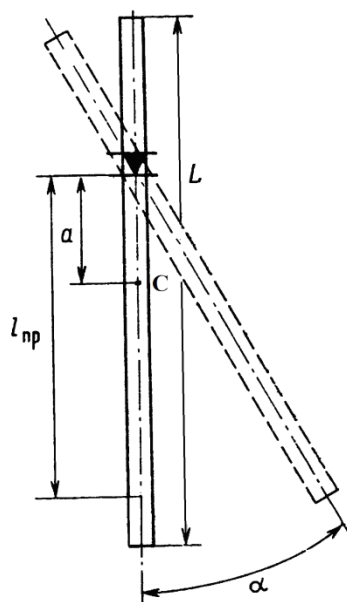


Рис. 9.2.

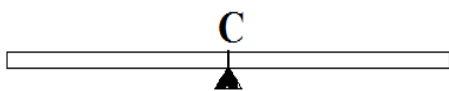


Рис. 9.3.

### Экспериментальные задачи, поставленные в работе:

- изучение свойств физического маятника;
- экспериментальное определение ускорения свободного падения;
- определение абсолютной и относительной ошибок косвенных измерений.

### Описание экспериментальной установки

Физический маятник, используемый в эксперименте (рис. 9.2), представляет собой однородный металлический стержень длиной  $L$ , на котором нанесены сантиметровые деления. По стержню может передвигаться опорная призма. Положение центра масс стержня  $C$  находится из условия равновесия стержня на опорной призме (рис. 9.3). Необходимые в работе линейные размеры стержня измеряются соответствующими измерительными инструментами.

### Подготовка протокола к работе

*(Выполняется во внеаудиторное время при подготовке к занятию)*

Запишите в лабораторной тетради номер и название работы.

Запишите в тетради заголовок: «**Задание. Изучение свойств физического маятника**»

Запишите формулы, используемые при выполнении **Задания** с расшифровкой буквенных обозначений, и подготовьте табл. 1 для записи результатов измерений.

Табл. 1

№	$a$ , м	$t_{40}$ , с	$T_{\text{эксп}}$ , с	$l_{\text{пр}}^{\text{эксп}}$ , м	$l_{\text{пр}}^{\text{теор}}$ , м	$\Delta l_{\text{пр}}/l_{\text{пр}}$ , %	$g$ , м·с <sup>-2</sup>
1							
2							
$i$							
$a_0^{\text{эксп}} = \underline{\hspace{2cm}}$ м		$l_{\text{пр}}^{\text{эксп}} (\text{мин}) = \underline{\hspace{2cm}}$ м		$g_{\text{ср}} = \underline{\hspace{2cm}}$ , м с <sup>-2</sup>			
$a_0^{\text{теор}} = \underline{\hspace{2cm}}$ м		$l_{\text{пр}}^{\text{теор}} (\text{мин}) = \underline{\hspace{2cm}}$ м		$\varepsilon_g = \underline{\hspace{2cm}}$ %			

### Измерения и обработка результатов

#### **Задание**

**Измерения.** В эксперименте измеряются периоды колебаний маятника при перемещении точки подвеса от середины, начиная с 5 см от центра масс, с шагом 5 см к концу стержня. Изменением положения центра масс маятника при движении опорной призмы по стержню пренебрегают ввиду малой массы опорной призмы по сравнению с массой стержня. Период колебания маятника находится путем измерения времени  $t_{40}$  сорока полных колебаний маятника, а именно:  $T_{\text{эксп}} = t_{40} / 40$ . Особенно тщательно измерения проводятся около точки, соответствующей минимальному периоду колебаний.

**Построение графика** (см. раздел В7 в [4] и раздел «Построение графика» в лабораторной работе 1.2). Постройте график зависимости  $T(a)$  и определите экспериментальные значения  $l_{\text{пр}}^{\text{эксп}}$  для трех значений периода колебаний (см. рис 9.1), один из которых равен  $T_{\text{мин}}$ .

**Вычисления.** Используя соотношение (2), вычислите ускорение свободного падения  $g$  для каждого из трех выбранных значений периода. В качестве итогового результата вычислите среднее арифметическое этих значений.

Приняв исследуемый маятник за тонкий однородный цилиндр длиной  $L$ , вычислите теоретические значения  $l_{\text{пр}}^{\text{теор}}$  для выбранных значений  $T(a)$  и сравните их с экспериментальными.

Данные измерений и вычислений  $t_{40}$ ,  $T_{\text{эксп}}$ ,  $a$ ,  $l_{\text{пр}}^{\text{эксп}}$ ,  $l_{\text{пр}}^{\text{теор}}$  и  $g$  внесите в табл. 1. Вычислите относительные ошибки косвенных измерений  $g$  (см. **В4** в [4] и **Приложение** в настоящей работе) и внесите их в табл. 1.

#### **Приложение**

Ускорение свободного падения вычисляется по результатам прямых измерений по формуле (4), то есть косвенным измерением. Из (2) можно получить:

$$g = 4\pi^2(l_{\text{пр}})/(T^2). \quad (9)$$

Тогда, используя (5) и примеры в В4 [4], получим относительную ошибку косвенных измерений  $g$ :

$$\varepsilon_g^2 = 4\varepsilon_\pi^2 + \varepsilon_{l_{\text{пр}}}^2 + 4\varepsilon_T^2, \quad \text{где} \quad \varepsilon_T = \varepsilon_t; \quad \varepsilon_{l_{\text{пр}}}^2 = \varepsilon_{a_1}^2 + \varepsilon_{a_2}^2 \quad (10)$$

### **Рекомендуемая литература:**

1. Гершензон Е.М., Малов Н.Н., Мансуров А.Н. Курс общей физики. Механика» (2001), гл. 5, §5.6, гл. 6.
2. Савельев И.В. Курс общей физики в 5 томах, т. 1, Механика (5-е изд., 2011), гл. 8 §8.1–8.6.
3. Сивухин Д.В. Общий курс физики в 5-ти томах, т. 1, Механика (4-е изд., 2005), гл. VI §39-41.
4. Введение в физический практикум.

### ***Примерные контрольные вопросы***

1. Дайте определение физического маятника и получите выражение для приведенной длины используемого в работе маятника.
2. Покажите, используя (4), что для любой точки (оси) подвеса физического маятника можно найти другую точку с тем же периодом колебаний, называемой сопряженной.
3. Получите формулы (5), (6), (7), (8).
3. Как определить положение центра масс физического маятника, если известно положение сопряженных точек подвеса?
4. Как расположены сопряженные точки у физического маятника, используемого в работе.
5. Почему амплитуда колебаний маятника при измерениях его периода должна быть небольшой?
6. Что является основным источником ошибок при определении  $g$  использованным вами методом?
7. Как влияет трение в системе на точность определения  $g$ ?
8. Вычислите момент инерции простейших тел: кольца, диска, шара, тонкого однородного стержня.
9. Получите соотношение (10) для вычисления относительной ошибки косвенных измерений  $g$ .