

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1.5<sup>1)</sup>

### ИЗМЕРЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ВЕЛОСИПЕДНОГО КОЛЕСА

*Цель работы:* экспериментальное определение момента инерции велосипедного колеса методами вращения и колебаний.

*Литература:* 1. Гершензон Е.М., Малов Н.Н., Мансуров А.Н. Курс общей физики. Механика (2001), гл. 5, § 5.1 – 5.4, гл. X, § 10.1.

2. Савельев И.В. Курс общей физики в 5 томах, т. 1, Механика (5-е изд., 2011), гл.5, §5.1–5.4, гл. 8, § 8.1 – 8.5.

3. Сивухин Д.В. Общий курс физики в 5-ти томах, т. 1, Механика (4-е изд., 2005), гл. V, § 30–36, гл. VI §39, 41.

4. Введение в физический практикум.

*Приборы и принадлежности:* велосипедное колесо со шкивом и гнездами, набор гирь, металлический шарик, секундомер, линейка, штангенциркуль.

### ВВЕДЕНИЕ

В работе момент инерции тела (велосипедного колеса) определяется двумя методами: методом вращения и методом колебаний.

В первом случае центр масс тела лежит на оси вращения. Колесо приводится во вращение силой натяжения нити, к свободному концу которой подвешен груз  $m$  (рис. 1.5.1). Из уравнения динамики вращательного движения тела относительно неподвижной оси  $Z$  следует, что  $I_{\epsilon} \epsilon = M_z$ , и можно вычислить момент инерции колеса  $I_{\epsilon}$ , если известны угловое ускорение  $\epsilon$  и момент силы натяжения нити  $M_z$ . Эти величины можно определить из измерений пути  $h$ , пройденного грузом  $m$ , за время  $t$ .

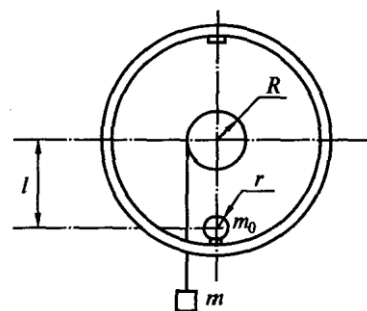


Рис. 1.5.1

Из уравнения динамики вращательного движения тела относительно неподвижной оси  $Z$  следует, что  $I_{\epsilon} \epsilon = M_z$ , и можно вычислить момент инерции колеса  $I_{\epsilon}$ , если известны угловое ускорение  $\epsilon$  и момент силы натяжения нити  $M_z$ . Эти величины можно определить из измерений пути  $h$ , пройденного грузом  $m$ , за время  $t$ .

$$I_{\epsilon} = \frac{M_z}{\epsilon} m R^2 \left( \frac{g t^2}{2h} - 1 \right), \quad (1)$$

где  $\epsilon = 2h/Rt^2$ .

Формула (1) выведена без учета сил трения. В работе предлагается учесть возникающие при вращении колеса силы трения. Для этого необходимо измерить максимальную массу подвешенного на нити груза  $\Delta m$ , при которой колесо еще не вращается. Так как в условиях равновесия  $\Delta m g R = M_{\text{тр}}$ , то расчетная формула с учетом сил трения на оси колеса принимает вид:

$$I_{\epsilon} = (m - \Delta m) R^2 \left( \frac{g t^2}{2h} - \frac{m}{m - \Delta m} \right). \quad (2)$$

Во втором случае положение центра масс тела необходимо сместить ниже оси вращения. В этом случае колесо представляет собой физический

<sup>1)</sup> Описание исправлено и дополнено преподавателями КОЭФ Александровым В.Н. и Васильевой И.А.

маятник. При отклонении его от положения равновесия на малый угол маятник приходит в колебательное движение с периодом, зависящим от его момента инерции относительно закрепленной оси:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_c}{m_u g l}}, \quad (3)$$

где  $m_u$  – масса маятника и  $l$  – расстояние от точки приложения возвращающей силы до оси вращения,  $I_c$  – момент инерции системы «колесо + шарик» относительно оси вращения (качаний).

## ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ УСТАНОВКИ

Экспериментальная установка представляет собой велосипедное колесо, способное вращаться вокруг горизонтальной оси (см. рис. 1.5.1). На шкив колеса намотана нить. К свободному концу нити прикреплена чашечка, в которую вкладывают различные грузы. Измерения времени движения груза производятся с помощью секундомера. Расстояние  $h$ , которое проходит груз  $m$  определяется линейкой.

На внутренней стороне обода колеса симметрично по диаметру имеются два одинаковых небольших гнезда. Помещая в одно из них металлический шарик массой  $m_u$ , мы получаем физический маятник, способный колебаться вокруг оси колеса.

Физическим маятником называется твердое тело, которое может качаться вокруг неподвижной горизонтальной оси. В этом случае положение тела в каждый момент времени можно характеризовать углом его отклонения  $\alpha$  от положения равновесия (вертикали – см. рис. 1.5.1). Тогда в соответствии с уравнением динамики вращательного движения твердого тела момент  $M$  возвращающей силы относительно оси колеса можно записать в виде:

$$M = I_c \varepsilon = I_c \ddot{\alpha} = F_\tau l = -m_u g l \sin \alpha \approx -m_u g l \alpha,$$

где  $I_c$  – момент инерции системы «колесо + шарик» относительно оси колеса,  $l$  – расстояние между точкой подвеса и точкой приложения возвращающей силы,  $F_\tau$  – проекция последней на касательную к ободу колеса. В нашем случае точка приложения возвращающей силы совпадает с центром масс шарика. Тогда момент возвращающей силы равен:

$$M = F_\tau l = -m_u g l \sin \alpha \approx -m_u g l \alpha.$$

Здесь знак минус обусловлен тем, что момент  $M$  препятствует увеличению угла  $\alpha$ . Это выражение можно записать в виде:

$$I_c \ddot{\alpha} + m_u g l \alpha = 0 \quad \text{или} \quad \ddot{\alpha} + \frac{m_u g l}{I_c} \alpha = 0.$$

Введя обозначение:  $\omega_0 = \sqrt{\frac{m_u g l}{I_c}}$ , получим уравнение:

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0,$$

решение которого известно из кинематики колебательного движения:

$$\alpha = \alpha_0 \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Из последнего выражения следует, что при малых колебаниях физический маятник совершает гармонические колебания с циклической частотой  $\omega_0$  и периодом:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I_c}{m_{ш} g l}}.$$

В этом случае момент инерции маятника  $I_c$  складывается из момента инерции самого колеса  $I_с$  и момента инерции шарика  $I_{ш}$  относительно оси, проходящей через ось вращения колеса. Используя теорему Штейнера легко показать, что:

$$I_{ш} = 0.4m_{ш}r^2 + m_{ш}l^2,$$

где  $r$  – радиус шарика и  $l$  — расстояние от центра масс шарика до оси вращения.

Выражение (3) в этом случае преобразуется к виду:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_{ш} + I_c}{m_{ш} g l}}, \quad (4)$$

откуда

$$I_c = \frac{T^2}{4\pi^2} m_{ш} g l - I_{ш}. \quad (5)$$

Для определения  $I_c$  измеряются период колебания маятника  $T$  (с помощью секундомера), масса шарика  $m_{ш}$  (на электронных весах), радиус шарика  $r$  (штангенциркулем) и расстояние  $l$  (линейкой).

## ИЗМЕРЕНИЯ И ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ

### Задание 1. Определение момента инерции колеса методом вращения.

Проведите измерение  $\Delta m$  в присутствии инженера.

Измерьте штангенциркулем диаметр шкива в разных местах (не менее трех раз) и найдите среднее значение радиуса шкива  $R$ . Взвесьте грузы (не менее двух:  $m_1$  и  $m_2$ ) и контейнер для грузов ( $m_k$ ) и прикрепите последний к концу нити.

Вращением колеса поднимите контейнер с грузом суммарной массой  $m_i$  на заранее отмеренную высоту от пола ( $h = 1 \div 1,5$  м) и, отпустив колесо, измерьте время движения груза  $t$  (с помощью секундомера) не менее трех раз и вычислите среднее время  $t_i$ . Измерения повторите, изменив массу  $m_i$  ( $m_1 + m_k$ ,  $m_2 + m_k$  и  $m_1 + m_2 + m_k$ ). Данные измерений  $t_i$ ,  $h$ ,  $m_i$ ,  $\Delta m$ ,  $R$  и вычисления  $I_{с\text{ ср}}$  и относительной ошибки  $\varepsilon_{\text{отн}}$  (см. В4 в [4] и пример в работе 1.1) измерения  $I_c$  внесите в таблицу 1.

Таблица 1

№	$R$ , м	$m_i$ , кг	$\Delta m$ , кг	$h$ , м	$t_i$ , с	$I_c$ , кг·м <sup>2</sup>	$I_{с\text{ ср}}$ , кг·м <sup>2</sup>	$\varepsilon_{\text{отн}}$ , %
1								
2								
3								

### Задание 2. Определение момента инерции колеса методом колебаний.

Снимите груз  $m$  с нити. Возьмите металлический шарик, определите с помощью весов его массу  $m_{ш}$  и с помощью штангенциркуля его радиус  $r_{ш}$ . Положите шарик в одно из гнезд велосипедного колеса и определите с помощью линейки расстояние  $l$  от центра шарика до оси колеса.

Выведите систему «велосипедное колесо и шарик» из положения равновесия, повернув на небольшой угол, и измерьте секундомером время 20 полных колебаний  $t$ . Определив период колебаний физического маятника  $T$ , рассчитайте момент инерции велосипедного колеса  $I_6$ .

Данные измерений  $m_{ш}$ ,  $t$ ,  $r_{ш}$ ,  $l$  и вычислений  $T$ ,  $I_c$ ,  $I_{ш}$ ,  $I_6$  и относительной ошибки  $\varepsilon_{отн}$  (см. [4] и пример в работе 1.1) измерения  $I_k$  внесите в таблицу 2.

Таблица 2

$M_c$ , кг	$r_{ш}$ , м	$l$ , м	$t$ , с	$T$ , с	$I_c$ , кг·м <sup>2</sup>	$I_{ш}$ , кг·м <sup>2</sup>	$I_6$ , кг·м <sup>2</sup>	$\varepsilon_{отн}$ , %

Сравните значения  $I_k$ , полученные двумя методами. Сравните относительные погрешности определения  $I_k$  методом колебаний и методом вращения. Объясните полученные результаты.

## ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Дайте определения момента силы, момента импульса и момента инерции твердого тела относительно неподвижной оси.

2. Сформулируйте основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела.

3. Выведите формулу для расчета момента инерции велосипедного колеса методом вращения (1).

4. Выведите формулу для расчета момента инерции велосипедного колеса методом колебаний (5).

5. От чего зависит момент инерции твердого тела. Приведите примеры расчета моментов инерции простейших тел: кольца, диска, шара и палочки.

6. При каких условиях можно считать колебания системы «велосипедное колесо + шарик» гармоническими.

7. Выведите формулы для оценки относительной и абсолютной погрешностей определения  $I_6$  методом вращения и методом колебания.

8. С какой точностью необходимо взять из таблицы значения  $\pi$  и  $g$  при определении  $I_6$  методом колебаний и методом вращения?

9. Какой из двух используемых методов (вращения или колебания) дает меньшую погрешность при определении  $I_6$ ?

10. Случайная или систематическая ошибка определяет точности измерения  $I_6$  в выполненных вами экспериментах?

11. Найдите скорость груза и угловую скорость вращения колеса через время  $t$  после начала движения. Получите ответ, исходя из законов динамики и исходя из закона сохранения энергии.

12. Как влияет сила трения на оси колеса на результаты измерения?

13. В каком из двух используемых методов определения  $I_6$  можно найти момент силы трения на оси колеса? Как это экспериментально сделать?