1. (Была решена на занятии, привожу для того, чтобы сослаться на нее из условия задачи 2) Проводящую среду (концентрация носителей n, заряд e, масса m_e) разделили тонкими изолирующими плоскостями на кубики со стороной a. Пусть внешним источником в ней создано переменное магнитное поле с частотой ω, ориентированное по оси y. Рассчитайте магнитную проницаемость среды как функцию частоты. При расчете используйте следующие приближения. 1) Замените кубики со стороной a цилиндрами с диаметром a, ориентированными вдоль оси y. 2) Магнитное поле предполагайте однородным. 3) Считайте, что все носители заряда движутся как целое и расположены на поверхности цилиндров. Указание: воспользуйтесь определением магнитной проницаемости как коэффициента пропорциональности между B и μ_0H, определением $H=B/\mu_0-M$, (M – магнитный момент единицы объема), формулой, выражающей магнитный момент через ток и обтекаемую им площадь, и законом электромагнитной индукции.

Ответ:

$\mu = \left\{1 + \frac{\pi^2}{64}\frac{\omega_{pl}^2 a^2}{c^2}\right\}^{-1}$ (c – скорость света, $\omega_{pl}^2 = \frac{ne^2}{\varepsilon_0 m_e}$ – квадрат плазменной частоты).

Знак между слагаемыми на самом деле «+»; на занятии у нас получился минус – с алгеброй мы все сделали правильно, но ошибочно был написан знак в уравнении Максвелла $\oint \vec{E}d\vec{l} = -\int \vec{B}d\vec{S}$ (я не написал минуса). Так что в этой модели μ получается всегда меньше 1.

2. Воспользовавшись ответом задачи 1, оцените отличие μ от 1 для типичного металла ($n=10^{29}$ м$^{-3}$). В качестве a возьмите размер атома. Указание: поскольку второе слагаемое в формуле для μ будет получаться много меньше первого, воспользуйтесь формулой $(1+x)^{-1}\approx 1-x$.

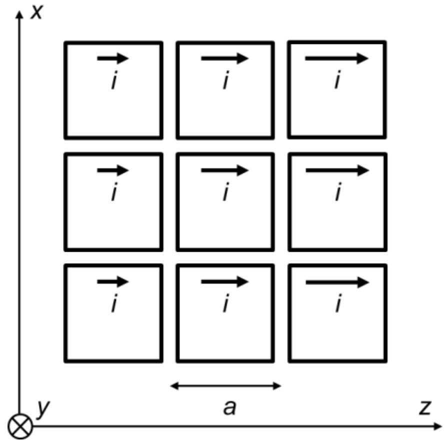
3. Решите задачу 1, считая, что на движущиеся как целое носители заряда действует еще и возвращающая сила, момент которой пропорционален углу поворота относительно оси y. Собственная частота колебаний равна ω_0.

Подсказка: по сравнению с решением задачи 1, изменится только выражение для тока *i* через поле *B*. Без возвращающей силы было $\frac{d}{dt}i = -\frac{1}{4}\frac{ne^2 S_1}{m_e}\frac{d}{dt}B$ (знак исправлен), а с возвращающей силой будет $\frac{d^2}{dt^2}i + \omega_0^2 i = -\frac{1}{4}\frac{ne^2 S_1}{m_e}\frac{d^2}{dt^2}B$; т.е., при гармонической зависимости от времени,

$$\left(-\omega^2 + \omega_0^2\right)i = -\frac{1}{4}\frac{ne^2 S_1}{m_e}\left(-\omega^2\right)B.$$

Ответ: $\mu = \left\{1 + \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2}\frac{\pi^2}{64}\frac{\omega_{pl}^2 a^2}{c^2}\right\}^{-1}$.

4. Искусственная среда сделана из проводящих квадратных рамок со стороной a, образующих периодическую структуру (см. рисунок) Зазор между рамками мал, как что период структуры тоже можно считать равным a. По рамкам текут кольцевые токи i. Считая, что ток i в данной рамке известным образом зависит от координаты центра рамки относительно оси z (т.е. известна зависимость i(z)), найдите, чему равна плотность тока j(z), получающаяся после усреднения по масштабу много больше a, – т.е. плотность тока, которую будет видеть наблюдатель, не разрешающий период структуры.


x
i
i
i
i
i
i
i
i
i
a
y
z