ВВЕДЕНИЕ В ФИЗИЧЕСКИЙ ПРАКТИКУМ[1)]

В1. ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Задачей физического эксперимента является определение числового значения искомых (измеряемых) физических величин с заданной точностью. Эта задача решается с помощью либо прямых, либо косвенных измерений.

При прямом измерении осуществляется количественное сравнение физической величины с соответствующим эталоном при помощи измерительных приборов. Отсчет по шкале прибора указывает непосредственно измеряемое значение. Например, линейка позволяет измерить длину x карандаша.

При косвенных измерениях интересующая нас физическая величина $A=f(x,y,z)$ находится при помощи математических операций над непосредственно измеренными физическими величинами, то есть, проведя прямые измерения величин x, y и z, мы находим искомое значение A путем вычислений по теоретическим формулам. Например, объем V прямоугольного параллелепипеда можно найти следующим образом: измерить линейкой каждый из его ребер x, y и z, а затем рассчитать V по известной формуле $V=x\cdot y\cdot z$.

Точность прямых измерений некоторой величины x оценивается величиной *погрешности* или *ошибки измерений*. Различают *абсолютную* Δx и *относительную* ε_x погрешности измерений.

Абсолютная погрешность Δx имеет размерность измеряемой физической величины x, а результат измерений с указанием абсолютной погрешности записывается в виде:

$$x = \bar{x} \pm \Delta x, \tag{1}$$

где $\bar{x}$ - число, равное среднему арифметическому значению n измерений x или «среднее по выборке»:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i . \tag{2}$$

Относительная погрешность ε_x, которую часто используют для сравнения точности различных методов измерения, определяется как

$$\varepsilon_x = \pm\frac{\Delta x}{\bar{x}} . \tag{3}$$

Она является безразмерной величиной и обычно выражается в процентах.

Для нахождения точности определения величины объема V в приведенном примере необходимо сначала найти погрешности прямых измерений длин ребер a, b и c, и, используя их, вычислить ошибку косвенного измерения объема V. Поэтому рассмотрим сначала порядок определения ошибок прямых измерений, а затем вычисление ошибок косвенных измерений (см. раздел В4).

[1)] Подготовлено преподавателями КОЭФ Александровым В.Н., Васильевой И.А., Коротаевой Е.А., и Сёмашем В.Д.

В2. ВИДЫ ОШИБОК ПРЯМЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Ошибки прямых измерений физических величин принято подразделять на *систематические, случайные* и *промахи.*

2.1. Систематические ошибки

Отличительным признаком *систематической* ошибки является то, что она практически одинакова при фиксированных условиях опыта, то есть во всех измерениях, проводимых одним и тем же методом и одними и теми же приборами. Такие ошибки можно устранить, применив более точные измерительные приборы или изменив метод измерения искомой величины. Систематические ошибки могут быть обусловлены разными причинами. Рассмотрим характерные случаи.

2.1.1.Ошибки известной природы, которые можно определить экспериментально или при помощи вычислений

Такие ошибки называют *поправками*, потому что, найдя ошибку и прибавив её к отсчёту прибора, мы можем скорректировать найденное числовое значение измеренной величины. Типичные примеры: введение поправок на магнитное поле Земли при лабораторных магнитных измерениях или учёт архимедовой силы (в атмосфере Земли) при нахождении массы тела путём взвешивания.

2.1.2.Ошибки известной природы, но неизвестной величины

С ошибками этого вида приходится сталкиваться каждому экспериментатору: радиоастроному, который измеряет интенсивность радиоизлучения от внеземных источников (Солнца, квазаров, радиогалактик и т.д.), мешает радиоизлучение атмосферы; геофизику, измеряющему радиоактивность минерала при помощи счетчика Гейгера, мешают космические лучи и т.д. Возможны два способа устранения ошибок такого рода: первый – измерить их и затем внести поправки, второй – придумать метод измерений, при котором измеряемая величина не зависела бы от мешающих факторов. На практике применяют оба способа.

2.1.3. Приборные ошибки

Эти ошибки обусловлены конструкцией измерительных приборов и технологией их изготовления и также заранее неизвестны. Предприятия - изготовители, однако, могут гарантировать некий максимальный уровень этих ошибок, который обычно указан на шкале прибора или в его техническом описании. Например, если на металлической линейке написано «1 мм», то это означает, что максимальная абсолютная приборная ошибка составляет $\Delta x_{пр}$= 1 мм, и при помощи такой линейки бесполезно проводить измерения с точностью до десятых долей миллиметра.

В тех случаях, когда сведения о величине приборной ошибки отсутствуют, её принимают равной половине цены деления шкалы прибора, если отсчёт измеряемой величины непрерывный (стрелочный прибор, линейка, транспортир и т.п.). Для приборов с дискретным (прерывистым, скачкообразным) отсчётом (часы с «прыгающей» стрелкой, цифровые приборы и приборы со ступенчатой

регулировкой, у которых значения регулируемой величины указаны напротив положений рукоятки соответствующих переключателей – генераторы низких частот, магазины сопротивлений или конденсаторов и т.п.) приборная ошибка считается равной минимальному шагу отсчета.

2.1.4.Ошибки неизвестного происхождения и неизвестной величины

Это самая опасная разновидность систематических ошибок. Чаще всего такие ошибки возникают в результате непредусмотрительности экспериментатора, который не сумел выявить все мешающие факторы. Иногда (но значительно реже) за ними кроются новые, неизвестные дотоле явления. В истории физики известны случаи, когда подробный анализ причин расхождения эксперимента с теорией приводил либо к ложным (и, как правило, быстро опровергаемым результатами последующих экспериментов) выводам, либо к важнейшим открытиям фундаментального характера. Лучшим способом выявления систематических ошибок такого рода является повторение измерений с использованием другого метода или оборудования.

2.2. Случайные ошибки

Случайные ошибки отличаются от систематических, прежде всего тем, что они имеют различные значения в отдельных измерениях, проводимых при одинаковых условиях, и подчиняются случайным, вероятностным законам. Вероятность появления ошибок такого рода можно вычислить, пользуясь законами статистики. Погрешности измерений в этих случаях вызываются рядом дополнительных, побочных факторов, учесть которые заранее невозможно. Так, например, случайные изменения амплитуды напряжения на выходе радиоприёмника могут быть вызваны различными причинами: электронным шумом, обусловленным тепловым движением зарядов в электрических цепях; случайным изменением условий распространения радиоволн; электрическими помехами от гроз или электродвигателя пылесоса, работающего в соседней комнате и т.п.

Случайные ошибки обычно превышают приборные погрешности и сравнимы по своей величине с самой измеряемой величиной (их часто называют «шумом»). Но как это не покажется парадоксальным, именно вероятностный характер случайных погрешностей позволяет с помощью специальной математической обработки, если не исключить их полностью, то заметно ослабить их воздействие на результат измерений.

2.3. Промахи

Промахи - это резкие отклонения результата отдельного измерения от всех остальных. Они связаны или с невнимательностью или неопытностью экспериментатора, или с неисправностью измерительных приборов, или, наконец, с дискретностью срабатывания системы управления и фиксации результатов лабораторными приборами (например, в установке «машина Атвуда» лабораторной работы № 1.2).

Как будет показано в п. **3.5**, промахи при помощи специальной обработки результатов измерений могут быть выявлены, а соответствующие им результаты, отброшены.

В3. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ПРЯМЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

3.1. Числовая оценка измеряемой величины.

Для учета случайных ошибок и промахов обычно измеряют одну и ту же физическую величину (длину или массу, или время и т.п.) несколько раз (не менее трех). Поэтому всегда получают ряд чисел (выборку) x_1, x_2, x_3, ..., x_n, вообще говоря, отличающихся друг от друга. Если результат одного из измерений x_i сильно отличается (более чем на 15 - 20%) от $\bar{x}$ (см. (2)), то оно считается промахом (см. п. **3.5**), отбрасывается, и проводится дополнительное измерение.

В математической статистике вводится понятие ***истинного значения X*** измеряемой величины. Это позволяет ошибку *i*-го измерения определить как разность между результатом отдельного измерения x_i и истинным значением X:

$$\delta_i = x_i - X \ . \tag{4}$$

Эта ошибка включает в себя систематическую ошибку δ_c (одинаковую для всей серии измерений) и случайную ошибку $\tilde{\delta}_i$ (различную для разных серий измерений), которые являются независимыми величинами. Поэтому:

$$\delta_i^2 = \delta_c^2 + \tilde{\delta}_i^2 \tag{5}$$

Ни систематическая δ_c, ни случайная ошибка $\tilde{\delta}_i$ нам заранее неизвестны.

Простейшее допущение о систематической ошибке δ_c сводится к предположению, что имеется только приборная погрешность (это допущение обычно приемлемо для измерений в физическом практикуме), которая не превышает некоторого максимального значения $\delta_c^{\max} = \Delta x_{\text{пр}}$ и является постоянной величиной для данной серии измерений.

Простейшее допущение о случайных ошибках $\tilde{\delta}_i$ сводится к предположению, что все эти ошибки $\tilde{\delta}_i$ статистически независимы, а средняя по всем измерениям (средняя по выборке) ошибка

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tilde{\delta}_i$$

стремится к нулю при неограниченном увеличении числа измерений:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tilde{\delta}_i\right) = 0. \tag{6}$$

В ряде случаев соотношение (6) можно толковать следующим образом: положительные ($\tilde{\delta}_i > 0$) и отрицательные ($\tilde{\delta}_i < 0$) отклонения от истинного значения измеряемой величины встречаются одинаково часто, так что в бесконечной сумме (6) происходит полная компенсация положительных и отрицательных ошибок.

В этом случае, как показывается в математической статистике, числовая оценка измеренной величины дается как ранее отмечалось, средним арифметическим из n измерений (2), обозначается как $\bar{x}$ и называется средним по выборке.

Существенно, что $\bar{x}$ – это случайная величина и в разных выборках из n измерений она может принимать различные значения. Несмотря на это, $\bar{x}$ ближе к

X, чем единичные измерения x_i, поскольку отклонение выборочного среднего $\bar{x}$ от истинного значения X меньше большинства погрешностей единичных измерений. В самом деле, выразив x_i из (4) и подставив его в (3), получим:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X + \delta_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X + \delta_c + \tilde{\delta}_i) = X + \delta_c + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tilde{\delta}_i \,. \qquad (7)$$

Согласно (6) при $n \to \infty$ происходит полная компенсация случайных ошибок, то есть величина $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tilde{\delta}_i$ стремится к нулю. Поэтому, выборочное среднее $\bar{x}$ стремится к $X + \delta_c$.

Таким образом, выборочное среднее $\bar{x}$ служит лучшей числовой оценкой измеряемой величины X, чем любое из единичных измерений x_i. Поэтому, сделав достаточно много измерений, можно практически полностью исключить случайные погрешности.

Однако на практике мы имеем дело с ограниченным числом измерений – обычно не менее трёх (к тому же даже при большом числе измерений не устраняется систематическая погрешность измерительных приборов $\delta_c = \Delta x_{\text{пр}}$).

3.2. Выборочная дисперсия. Среднеквадратичная и среднеарифметическая погрешность.

Из эксперимента мы можем найти только случайные отклонения отсчетов x_i от выборочного среднего $\bar{x}$. Эти отклонения мы обозначили как $\tilde{\delta}_i$:

$$\tilde{\delta}_i = x_i - \bar{x} \,. \qquad (6)$$

Выборочной дисперсией s^2 измерения называется величина

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\tilde{\delta}_i)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \,. \qquad (7)$$

Квадратный корень из выборочной дисперсии, то есть величина $\sqrt{s^2} = s$, называется **среднеквадратичной погрешностью** измерения:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\tilde{\delta}_i)^2} \,. \qquad (8)$$

Среднеквадратичная погрешность s характеризует степень разброса единичных измерений относительно X: в интервал $\bar{x} - s < x_i < \bar{x} + s$ попадает примерно 70% всех отсчётов x_i.

Степень разброса единичных отсчётов можно также оценить среднеарифметической погрешностью

$$r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\tilde{\delta}_i\right| . \qquad (9)$$

Вычислять среднеарифметическую погрешность r проще, чем среднеквадратичную ошибку s. Однако, как показано в математической статистике, использование среднеквадратичной погрешности предпочтительней.

Выборочная дисперсия s^2 тоже случайная величина: она принимает различные значения для разных серий измерений. Однако при очень большом числе измерений выборочная дисперсия стремится к вполне определённому значению σ^2, которое называется дисперсией генеральной (то есть всеобщей, содержащей бесконечное число отсчётов) выборки:

$$\sigma^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - X)^2 .$$

Для оценки точности измерений в теории вероятностей используется также понятие *плотности вероятности* величины x_i. Плотность вероятности $w(x_i)$, умноженная на малый интервал dx, даёт вероятность попадания P случайной величины x_i в интервал от x до $x + dx$:

$$w(x_i)dx = P(x < x_i < x + dx). \qquad (10)$$

Статистическое среднее (*математическое ожидание*) величины x определяется при этом как

$$\bar{x}_{\text{ст}} = \int_{-\infty}^{\infty} x w(x) dx , \qquad (11)$$

а разброс значений измеряемой величины вокруг её математического ожидания - *дисперсия генеральной выборки*, как

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 w(x) dx . \qquad (12)$$

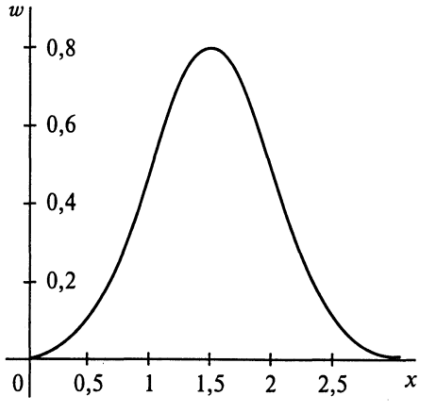

Рис. В2

Если функция распределения вероятностей $w(x)$ имеет вид одногорбой кривой, как показано на рис. В.2, то $\bar{x}_{\text{ст}}$ приблизительно отвечает положению максимума кривой $w(x)$, поскольку значения случайной величины x концентрируются вблизи $\bar{x}_{\text{ст}}$. Дисперсия же σ^2 характеризует «ширину» кривой, то есть степень разброса величин x_i относительно $\bar{x}_{\text{ст}}$.

Приступая к опыту, мы не знаем истинного значения дисперсии σ^2, но мы можем с той или иной степенью точности оценить её. Такой приемлемой оценкой σ^2 может служить выборочная дисперсия s^2.

3.3. Точность измерений.

Точность измерений (числовой оценки X) определяется по-разному в зависимости от соотношения между приборной ошибкой δ_c и среднеквадратичной ошибкой s.

3.3.1. Когда случайные погрешности пренебрежимо малы ($\tilde{\delta} << \delta_c$), то точность числовой оценки величины X определяется приборной погрешностью. Истинное значение X отличается от величины $\bar{x}_{\text{ст}}$ не более чем на δ_c:

$$\bar{x}_{CT} - \delta_c \le X \le \bar{x}_{CT} + \delta_c \quad \text{или} \qquad X = \bar{x}_{\text{ст}} \pm \delta_c . \qquad (13)$$

Ясно, что при $s << \delta_c$ не нужно проводить много измерений. В принципе достаточно ограничиться лишь единичным отсчётом, взяв в качестве $\bar{x}_{\text{ст}}$ результат любого измерения x_i. Однако предварительно нужно убедиться в том, что $s << \delta_c$.

6

На практике, как уже говорилось, проще оценивать не среднеквадратичную погрешность *s*, а среднеарифметическую погрешность *r*, которая сравнима с *s* по порядку величины. Поэтому достаточно проверить выполнение условия $r<<\delta_c$. Еще проще (и это вполне допустимо) проверить условие $|\Delta x|_{\max}<<\delta_c$, где $|\Delta x|_{max}$ - максимальное значение абсолютной погрешности $\Delta x_i = (x_i - \bar{x})$ (см. раздел В1). Если $|\Delta x|_{max}<<\delta_c$, то ошибка измерений определяется только прибором и результат измерений записывается в форме (13), в которой $\bar{x}_{\text{ст}}$ заменяется на $\bar{x}$.

3.2.2. По-иному обстоит дело в другом предельном случае, когда $s>>\delta_c$. В этом случае можно пренебречь в формуле (5) систематической погрешностью δ_c:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = X + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \tilde{\delta}_i \,. \qquad (14)$$

Используя это выражение, можно показать, что **дисперсия выборочного среднего** $(\sigma`)^2$ равна

$$\sigma'^2 = \frac{\sigma^2}{n}, \qquad (15)$$

где σ^2 — дисперсия генеральной выборки.

Таким образом, среднеквадратичное отклонение выборочного среднего σ' в $\sqrt{n}$ раз меньше σ. Это означает, что с ростом числа измерений разброс случайной величины $\bar{x}_{\text{ст}}$ относительно истинного значения *X* уменьшается.

Обрабатывая результаты измерений x_i по формуле (7), мы можем определить не дисперсию генеральной выборки σ^2, а выборочную дисперсию s^2. Поэтому для среднеквадратичного отклонения выборочного среднего σ' получаем приближенную формулу

$$\sigma' = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum(\tilde{\delta}_i)^2}{n(n-1)}} \,. \qquad (16)$$

Эта величина и принимается за точность измерений при $s >> \delta_c$. Считают, что истинное значение *X* с вероятностью *P=0.68* лежит в интервале:

$$\bar{x} - \sigma' \le X \le \bar{x} + \sigma' \quad \text{или} \quad X = \bar{x} \pm \sigma' \,. \qquad (17)$$

При *P=0.95* $X = \bar{x} \pm 2\sigma'$, а при *P=0.9973* $X = \bar{x} \pm 3\sigma'$. Таким образом, погрешность измерений разумно характеризовать большей из величин δ_c или σ'. Если же они примерно одинаковы, то полную погрешность $\delta_{\text{полн}}$ [2)] вычисляют по формуле

$$\delta_{\text{полн}} = \sqrt{\delta_c^2 + (\sigma')^2} \,. \qquad (18)$$

Из этого соотношения видно, что при $\delta_c > 3\sigma'$ погрешностью σ' можно пренебречь, а в случае $\sigma' > 3\delta_c$ можно пренебречь погрешностью δ_c.

3.3. Выбор числа измерений.

Увеличивая число измерений *n,* случайную погрешность σ' можно сделать как угодно малой. Ясно, однако, что безграничное увеличение *n* нецелесообразно.

[2)] Здесь $\delta_{\text{полн}}$ является аналогом величины Δx в разделе В1 «Введения в физический практикум».

Разумное ограничение числа опытов состоит в том, чтобы сделать σ' меньше приборной ошибки δ_c, доведя её, скажем, до уровня $\sigma' = \delta_c / 2$. Из этого соотношения при помощи (16) легко оценить нужное число измерений:

$$n \approx \left(\frac{2s}{\delta_c} \right)^2 . \qquad (18.1)$$

Если, например, $s = 5\delta_c$, то n=100. Дальнейшее увеличение числа измерений уменьшило бы случайную погрешность σ', но не улучшило бы точности числовой оценки *X*.

3.4. Надежность измерений.

Так как обычно число измерений *n* существенно меньше, чем следует из (18.1), то истинное значение *X* лежит в интервале (17) не точно, а с вероятностью α.

Поэтому надежность измерений характеризуется *доверительной вероятностью* α и *доверительным интервалом* Δx_α. Доверительный интервал Δx_α ограничивает такую окрестность $\bar{x} \pm \Delta x_\alpha$, куда с заданной (доверительной) вероятностью α попадает истинное значение *X*. Доверительный интервал и доверительная вероятность, таким образом, связаны между собой соотношением

$$P(\bar{x} - \Delta x_\alpha < X < \bar{x} + \Delta x_\alpha) = \alpha . \qquad (19)$$

Из этого соотношения можно в принципе найти Δx_α при заданном α и наоборот.

В простейшем случае, когда основная погрешность имеет систематическое происхождение ($\delta_c >> s$), истинное значение *X* лежит в интервале $\bar{x} - \delta_c \le X \le \bar{x} + \delta_c$ со стопроцентной вероятностью (надежностью):

$$P(\bar{x} - \delta_c \le X \le \bar{x} + \delta_c) \approx 1 , \qquad (20)$$

поскольку δ_c – это верхняя граница возможных погрешностей. Из сравнения выражений (19) и (20) следует, что $\pm\delta_c$ – это величина доверительного интервала Δx_α, соответствующего 100–процентной надежности.

3.5. Исключение промахов.

Среди отсчётов x_i, полученных в результате *n* измерений, могут оказаться числа, резко отличающиеся от остальных. Такие числа могут появиться в результате описок, из-за невнимательности, из-за случайных кратковременных сильных помех и т.д. Обычно такие числа (промахи) исключаются из рассмотрения. Критерий отбрасывания промахов состоит в том, что исключаются из рассмотрения отсчеты, для которых $|\Delta x_i| > 3s$. Обоснованием этому служит то, что при нормальном законе распределения ошибок вероятность попадания абсолютной погрешности измерения Δx_i за пределы интервала (–3*s*, +3*s*) составляет всего лишь 0,3%.

Следует, однако, отметить, что сначала надо рассчитать *s* с учётом всех измерений, включая предполагаемые промахи, и затем уже проводить сравнение. После отбрасывания промахов, расчёт *s* следует провести заново.

3.6. Пример обработки результатов прямых измерений.

Пусть в результате восьми измерений некоторой величины с приборной погрешностью $\delta_c = 0{,}5$ получены некоторые числа x_i (см. табл. 1).

Вычислим сначала выборочное среднее $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i$. В нашем случае

$$\bar{x}=(101+100+103+92+99+97+94+98)/8 =98.$$

Таблица 1

x_i	101	100	103	92	99	97	94	98
$\Delta x_i = x_i - \bar{x}$	3	2	5	-6	+1	-1	-4	0
$(\Delta x_i)^2$	9	4	25	36	1	1	16	0

Вычислим далее абсолютные погрешности отдельных измерений $\Delta x_i = x_i - \bar{x}$, их квадраты $(\Delta x_i)^2$ и среднеквадратичную погрешность $s = \sqrt{\frac{\sum (\Delta x_i)^2}{n-1}}$. Имеем:

$$s = \sqrt{\tfrac{1}{7}(9+4+25+36+1+1+16+0)} = \sqrt{13} = 3{,}6.$$

Поскольку ни одно из чисел Δx_i, не превышает $3s = 10{,}8$, то среди результатов измерений нет промахов.

В нашем случае среднеквадратичная погрешность $s = 3{,}6$ оказалась больше приборной. Поэтому точность измерений определяется случайными, а не приборными погрешностями. Среднеквадратичное отклонение выборочного среднего $\bar{x}$ можно определить по формуле (16):

$$\sigma' \approx \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{3{,}6}{\sqrt{8}} \approx 1{,}3.$$

Поскольку $\delta_c = 0{,}5$, заключаем, что точность числовой оценки $\bar{x}$ тоже определяется преимущественно случайными ошибками, так что

$$X = \bar{x} \pm \sigma' = 98 \pm 1{,}3.$$

Чтобы снизить случайную погрешность $\sigma' = \frac{s}{\sqrt{n}}$ до уровня систематической погрешности $\delta_{\max} = 0{,}5$, т, е. уменьшить σ' примерно в 2,5 раза, нужно было бы увеличить число измерений в $2{,}5^2 \approx 6$ раз, то есть сделать $8 \cdot 6 = 48$ измерений. Уровень же $1/2\,\delta_{\max} = 0{,}25$ может достигаться примерно при 200 измерениях.

Заметим, что значение $\bar{x}$ при записи окончательного результата следует округлять с учётом величины абсолютной ошибки, а именно: порядок последней значащей цифры $\bar{x}$ не должен быть меньше порядка первой значащей цифры ошибки (например, $42{,}8 \pm 2{,}4$, а не $43 \pm 2{,}4$). Действительно, невозможно гарантировать значение величины на уровне десятых долей, если ошибка измерений составляет несколько единиц. Относительная ошибка ε в нашем примере равна:

$$\frac{\sigma'}{\bar{x}} = \frac{1{,}3}{98} \approx 0{,}013 = 1{,}3\%.$$

9

<u>В большинстве лабораторных опытах практикума обычно проводится 3-5 измерений и статистическая обработка их результатов не требуется, поэтому в лабораторном практикуме принято:</u>

1) измеряемой величиной *X* прямых измерений считать величину $\bar{x}$ (см. (2));

2) абсолютной ошибкой прямых измерений Δx считать величину, равную

$$(\Delta x)^2 = (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tilde{\delta}_i)^2 + (\Delta x_{\text{пр}})^2 = (\Delta\bar{x})^2 + (\Delta x_{\text{пр}})^2, \quad (21)$$

где $$\Delta x_i = \bar{x} - x_i \quad (22)$$

и $$\Delta\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i \,. \quad (23)$$

3) относительную ошибку прямых измерений вычислять по формуле (3).

В4. ПОГРЕШНОСТИ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Большинство физических величин приходится измерять косвенным образом. При этом сначала измеряются, например, прямым методом некоторые независимые величины *x* и *y,* а затем интересующая нас величина *A* определяется по расчетной формуле:

$$A = f(x,y).$$

Вопрос о погрешностях величины *A* в этом случае решается для систематических и случайных ошибок математическими методами. Пусть $\bar{x}$ и $\bar{y}$ - средние значения непосредственно измеренных независимых величин *x* и *y,* а величины Δx и Δy - соответствующие им абсолютные погрешности этих прямых измерений, которые являются независимыми ошибками. Тогда в качестве числового значения величины *A* берут её среднее значение:

$$A_c = f(\bar{x},\bar{y}),$$

а абсолютную ошибку ΔA определяют как $\Delta A = \pm\varepsilon_A \cdot |A_c|$ (далее знаки ± не ставятся, они будут подразумеваться по умолчанию).

Пусть величина *y* найдена или известна с точностью во много раз превышающей точность определения *x* (на математическом языке в первом приближении это означает, что $\Delta y \to 0$ и $y=const$). Тогда относительная ошибка вычисления величины A_c ($\boldsymbol{\varepsilon_{Ax}}$), обусловленная измерениями величины *x,* находится по формуле:

$$\boldsymbol{\varepsilon_{Ax}}|_{y=const} = d\{ln[f(x,y)]\}|_{y=const} = \frac{1}{|A_c|}\cdot|[\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}]_{y=const}|\cdot\Delta x = \frac{\bar{x}}{|A_c|}\cdot|[\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}]_{y=const}|\cdot\frac{\Delta x}{\bar{x}} = \boldsymbol{a_x}\cdot\boldsymbol{\varepsilon_x}, \quad (24)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon_x} = \frac{\Delta x}{\bar{x}}$, а величину $\boldsymbol{a_x} = \frac{\bar{x}}{|A_c|}\cdot|[\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}]_{y=const}|$ называют «весовым» коэффициентом.

В выражение для a_x входит частная производная функции $A=f(x,y)$ по переменной *x*, которая обозначается как $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$. По определению частной производной функции нескольких переменных эта производная находится по правилу дифференцирования функции одной переменной при условии, что остальные переменные рассматриваются как постоянные величины. Поэтому можно считать, что условие типа «$y=const$» выполняется автоматически.

10

Очевидно, что аналогичное соотношение, но со сменой соответствующих индексов x на y, можно получить, и для $\boldsymbol{\varepsilon_{Ay}}$. Поскольку вид формулы (24) не зависит от точности измерения переменных x и y, а сами относительные ошибки $\boldsymbol{\varepsilon_{Ax}}$ и $\boldsymbol{\varepsilon_{Ay}}$ являются независимыми величинами, то их результирующая величина $\boldsymbol{\varepsilon_A}$ должна находиться по правилу вычисления модуля вектора (что показывается в математической статистике), то есть:

$$\boldsymbol{\varepsilon_A^2 = \varepsilon_{Ax}^2 + \varepsilon_{Ay}^2 = a_x^2 \varepsilon_x^2 + a_y^2 \varepsilon_y^2,} \qquad (25)$$

или в случае k независимых переменных получаем следующее соотношение:

$$\boldsymbol{\varepsilon_A^2 = a_x^2 \varepsilon_x^2 + \ldots + a_k^2 \varepsilon_k^2.} \qquad (26)$$

Из соотношений (25) и (26) следует, что относительная ошибка косвенных измерений величины A зависит не только от точности прямых измерений, например x, но и от функциональной зависимости A, а именно «весового» коэффициента $\boldsymbol{a}$.

Приведем примеры результатов вычисления относительных ошибок $\boldsymbol{\varepsilon_A}$ для некоторых функциональных зависимостей $\boldsymbol{A}$, наиболее часто используемых в практикуме, в которых коэффициент α не имеет размерности, а коэффициент β имеет размерность обратную аргументу:

1) $A = \alpha x$; $\quad \varepsilon_A = \varepsilon_x$, $\quad$ где $\varepsilon_A = \varepsilon_x = \Delta x/\bar{x}$.

2) $A = \alpha x \pm y$; $\quad \varepsilon_A^2 = a_x^2 \cdot \varepsilon_x^2 + a_y^2 \cdot \varepsilon_y^2$,

где $\varepsilon_y = \Delta y/\bar{y}$; $a_x = \alpha \cdot \bar{x}/|A_c|$; $a_y = \bar{y}/|A_c|$.

3) $A = \dfrac{\alpha x y}{z}$; $\quad \varepsilon_A^2 = \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2$.

4) $A = ln(\beta x)$; $\quad \varepsilon_A = \dfrac{\varepsilon_x}{|ln\,(\beta \bar{x})|} = \dfrac{\varepsilon_x}{|A_c|}$.

5) $A = lg\,(\beta x)$; $\quad \varepsilon_A = \dfrac{0{,}43 \cdot \varepsilon_x}{|lg\,(\beta \bar{x})|} = \dfrac{0{,}43 \cdot \varepsilon_x}{|A_c|}$.

6) $A = e^{\beta x}$; $\quad \varepsilon_A = \beta \cdot \Delta x$.

7) $A = x^{\alpha}$; $\quad \varepsilon_A = \alpha \cdot \varepsilon_x$.

Отметим, во-первых, что в случаях 4) – 7) ошибка ε_A повышенная, поэтому здесь обычно применяется графический метод обработки результатов (см. раздел В7).

Во-вторых, если в формулу для определения величины A входят математические константы (π, e и т.п.), универсальные физические постоянные, табличные данные из справочников и т.п., то следует помнить, что точность задания этих величин не должна быть ниже точности измеренных величин $x, y, \ldots$.

В5. ЗАПИСЬ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА

5.1. В каждом эксперименте очень важно немедленно и без какой-либо обработки записывать результаты проделанных измерений. Запись должна быть ясной и экономной. Не следует проводить никаких, даже самых простых арифметических расчетов в уме, не записав результат измерения. Например, если для определения силы тока в амперах показания амперметра нужно делить на 2,

то рекомендуется вначале записать показания прибора в делениях шкалы, цену деления шкалы и лишь затем разделить результаты на 2. Действительно, если при делении в уме была допущена ошибка, то позже без записи результата непосредственного измерения исправить её уже невозможно. При проведении и записи измерений желательно проверить то, что записано, взглянув ещё раз на прибор. Это способствует исключению промахов.

Иногда целесообразно записывать серийные номера приборов, используемых при измерениях. Впоследствии это может пригодиться: так, если в ходе эксперимента или домашних расчетов обнаружатся какие-нибудь неувязки, то всегда можно заново проверить данный результат, не проводя всей серии измерений на новых приборах.

5.2. Результаты экспериментов удобнее всего записывать в виде таблиц. Такая запись компактнее и проще для чтения. В начале каждого столбца пишется название или символ соответствующей величины и указывается единица измерения. В таблице должны быть записаны значения величин, как полученные непосредственно в эксперименте, так и рассчитанные затем на основе экспериментальных данных.

5.3. Перед вычислениями следует выписать значения используемых констант и параметров экспериментальных установок с требуемой точностью.

В6. ВЫЧИСЛЕНИЯ

Цель эксперимента – получить числовое значение некоторой физической величины. Поэтому точность при вычислениях так же важна, как и при измерениях. Точность вычислительных средств (калькулятор, различные математические таблицы) не должна быть ниже точности измерений.

Вероятность появления случайных ошибок при расчетах можно уменьшить при рациональном подходе к вычислениям. Укажем некоторые способы устранения арифметических ошибок.

6.1. Чтобы избежать ненужных выкладок, целесообразно максимально упростить используемую формулу: вынести постоянные множители из-под корня, привести подобные члены, сократить общие множители и т. д. Приведем пример. При проверке уравнения Бернулли в эксперименте с использованием трубок различного сечения измеряется расход воды Q и разность давлений в трубках $\Delta p=p_1-p_2$. На построенный по полученным данным график $Q = f(\sqrt{\Delta p})$ наносится теоретическая зависимость, для расчета которой используются экспериментальные значения разности давлений Δp:

$$Q = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\left(\frac{1}{S_1^2}-\frac{1}{S_2^2}\right)}\rho},$$

где S_1, S_2 – сечения трубок, ρ – плотность жидкости. Для упрощения расчета теоретических данных рекомендуется сначала вычислить постоянный множитель $K = \sqrt{\frac{2}{\left(\frac{1}{S_1^2} - \frac{1}{S_2^2}\right)}\rho}$, а затем для различных значений Δp рассчитать Q по формуле

$$Q = K\sqrt{\Delta p}\,.$$

6.2. Вычисления должны проводиться как можно более последовательно и аккуратно. Запись следует вести так, чтобы было много свободного места. Неаккуратная и неразборчивая запись выкладок часто оказывается причиной арифметических и других ошибок. Все вычисления должны сразу выполняться в чистовой тетради. Сначала записывается алгебраическая формула, затем в нее подставляются цифровые данные в системе СИ и далее производятся вычисления. Данные математической обработки *результатов экспериментов*, как правило, должны быть представлены в таблице, выполняя следующие правила:

1) Погрешность обычно округляют до одной значащей цифры или двух, если первая из них единица (записывают, например, 0,12 или 0,5; $2{,}25\cdot10^{2}$ или $1{,}6\cdot10^{-4}$).

2) При записи значения полученной величины следует указывать все цифры до последнего десятичного разряда, использованного для записи погрешности (например, d= (2,35 ± 0,12) мм, а не d = (2,3±0,12) мм).

3) Следует также иметь в виду, что при математических действиях с цифрами, имеющими разное число разрядов, результат определяется числом, у которого последняя цифра имеет старший разряд при операциях сложения и вычитания. (Например, при сложении «5,15 + 4» следует округлить 5,15 до 5 и представить ответ в виде «5 + 4 = 9»). Результат умножения или деления двух чисел с различным числом разрядов следует округлять до минимального (Например, «5.15 × 4= 20,6 ≈ 21», так как число «4» имеет только разряд единиц). При других математических действиях (извлечении корня, логарифмировании и т.д.) результат записывают с тем же числом значащих цифр, что и в аргументе.

4) При выполнении вычислений, соответствующим промежуточным результатам, сохраняют на одну значащую цифру больше и только в конечном результате производят округление.

6.3. Проверку арифметических выкладок следует рассматривать как необходимую часть вычислений. При расчетах нужно следить за тем, чтобы полученные значения имели разумный порядок величины, который целесообразно приблизительно оценить до начала вычислений.

При выполнении лабораторных работ рекомендуется использовать различные методы вычислений. По инструментальному признаку их можно разделить на: *устные, с карандашом и бумагой, и компьютерные*.

Устные вычисления (в уме) производятся с точностью равной одной или двум значащим цифрам и используются для оценки полученных результатов и оперативного выявления очень грубых промахов. Такие вычисления не требуют никаких инструментов и способствуют развитию памяти, абстрактного мышления

13

и умения выделять главное.

Вычисления с карандашом и бумагой (иногда с калькулятором) широко применяются для обработки результатов небольшого объема. Такие вычисления позволяют следить за преобразованием данных по шагам и способствуют развитию не только логического, но и операционного мышления. Кроме того, они развивают способность к концентрации внимания и способствуют запоминанию и структуризации материала.

Компьютерная обработка данных используется только в случае очень больших объемов расчетов, когда используемые при таких расчетах методы освоены или же, когда стоит задача краткого знакомства с этими методами только на уровне их применения. Кроме того, компьютер часто используется при статистических расчетах, прямом численном моделировании, интерполяции, экстраполяции, регрессии (подборе коэффициентов формул), сборе экспериментальных данных и обработке результатов эксперимента в реальном масштабе времени.

Например, при нахождении произведения двух величин и оценки точности полученного результата достаточно в зависимости от требуемой точности и числа измерений все вычисления произвести или устно, или с карандашом и бумагой, а при нахождении среднего значения и дисперсии серии из десятков значений имеет смысл воспользоваться компьютером или соответствующим калькулятором.

По типу восприятия и мышления методы вычислений можно разделить на *численные* (табличные), *аналитические* (символьные) и *визуальные* (графические). Все они должны использоваться не только при компьютерной и бумажной обработке, но и, что очень важно для развития способностей обучаемых, при вычислениях в уме.

Отметим, что наиболее полное и наглядное представление об изучаемом явлении можно получить только при одновременном описании в цифровой (таблицы), графической (графики зависимостей одной и нескольких переменных) и абстрактной символьной (формулы и уравнения) формах.

В7. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

В экспериментальной физике широко пользуются графиками. Графический метод представления результатов даёт возможность наглядно проследить вид функциональной зависимости. Используя графическую зависимость $y(x)$ в пределах проведенных измерений, можно находить значения величины y для таких значений x, для которых измерения не проводились.

При построении графика следует заранее выбрать масштаб, разметить оси координат и лишь после этого приступать к нанесению на график экспериментальных точек.

При выборе масштаба на графике следует исходить из следующих соображений:

1) Экспериментальные точки не должны сливаться друг с другом. В этом случае из графика трудно извлечь полезную информацию. Поэтому лучше

выбрать такой масштаб, чтобы расположить точки с разумным интервалом.

2) Масштаб должен быть простым. Проще всего, если единица измеренной величины (или 10, 100, 0,1 и т. д. от единицы) на оси графика соответствует 1 см. Можно выбрать такой масштаб, чтобы 1 см соответствовал двум или пяти единицам. Других масштабов следует избегать, потому что при нанесении точек на график придется производить дополнительные арифметические расчеты. Степени десяти удобнее относить к единице измерения. Тогда деления масштаба на осях графика можно отмечать цифрами 1, 2, 3 или 10, 20, 30, …, а не 10000, 20000 и т.д. или 0,001, 0,002 и т.д. На осях координат следует указывать название или символ измеряемой величины и единицы её измерения (например, «I, 10^{-3} А» или «U, 10^{2} В»). Чтобы не перегружать оси графика надписями, рекомендуется надписывать на осях только начало координат, первое и кратные пяти или десяти деления масштаба.

Числовые значения измеряемых величин на графике указывать не следует.

Результаты, полученные в разных сериях измерений, а также теоретические значения исследуемой величины обозначают на графике (рис. В.3) отличающимися друг от друга значками (точками, крестиками, кружочками и т.п.).Собственно график (линию) проводят через экспериментальные точки в виде плавной линии (здесь прямая) так, чтобы эти точки равномерно распределялись по обе стороны кривой. Дополнительным способом проверки правильности графика служит нанесение экспериментальных точек в виде вертикальных и горизонтальных отрезков, длины которых определяются абсолютными ошибками измерения соответствующих величин (на рис. В.3 они не изображены). Кривая графика должна проходить в пределах этих отрезков.

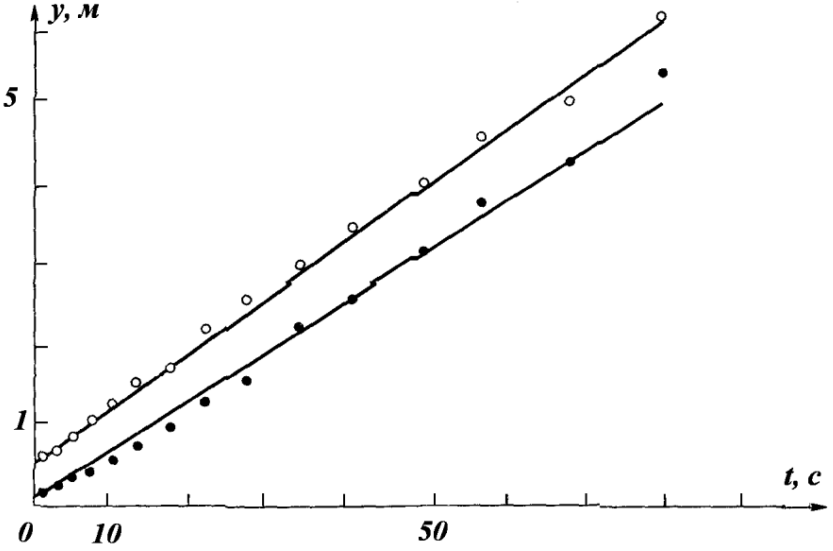

Рис. В.3

Кроме системы координат с равномерным масштабом, часто применяются *полулогарифмическая* и *логарифмическая* шкалы. Полулогарифмическая система координат – это прямоугольная система координат, по одной оси которой используется равномерный масштаб, а по второй – неравномерный логарифмический масштаб. Он будет равномерным для логарифмов чисел.

Действительно, пусть некоторое физическое явление описывается математической формулой:

$$\varphi(t)= \varphi_0 \cdot e^{-\beta t}. \qquad (27)$$

При этом в эксперименте измеряются значения величины $\varphi(t_i)$ в моменты времени t_i,и по результатам этих прямых измерений необходимо найти коэффи-

15

циент (число) в показателе экспоненты (β). Из формулы (27) можно получить, что для результатов каждого измерения справедливо следующее соотношение:

$$ln(\varphi_0/\varphi_i) = \beta \cdot t_i. \quad (28)$$

Из (28) следует, что построив результаты экспериментов в полулогарифмическом масштабе $\{t, ln(\varphi_0/\varphi)\}$, экспериментальные точки расположатся вдоль прямой, тангенс угла наклона которой к оси абсцисс (t) равен искомому коэффициенту β.

Если физическая закономерность описывается формулой:

$$y = x^{\alpha}, \quad (29)$$

в которой α–искомый в эксперименте постоянный коэффициент. Из формулы видно, что, построив полученные прямыми измерениями значения x_i и y_i в двойном логарифмическом масштабе $\{lgx, lgy\}$,экспериментальные точки расположатся вдоль прямой, тангенс угла которой к оси абсцисс равен искомому коэффициенту α:

$$lgy = \alpha \cdot lgx. \quad (30)$$

Таким образом, при выборе системы координат рекомендуется строить графики в таких координатах $\{x, y\}$, в которых предполагаемая функциональная зависимость выражается прямой линией. Это позволяет быстро проверить правильность предположения о характере исследуемой зависимости и легко определить ее параметры. Например, если предполагается зависимость:

$$A(t) = k_1 + \frac{k_2}{t}, \quad (31)$$

то в координатах $\{\frac{1}{t}, A\}$ она должна выражаться прямой линией, а коэффициенты k_1 и k_2 можно определить тогда непосредственно из графика.

Обработка результатов измерений в соответствии с приведенными в настоящем разделе рекомендациями обеспечивает успешное выполнение лабораторных работ в физическом практикуме.

В8. ПОРЯДОК РАБОТЫ СТУДЕНТОВ В ЛАБОРАТОРИЯХ ФИЗИЧЕСКОГО ПРАКТИКУМА

1. За учебный семестр студентом выполняется 9 - 10 лабораторных работ в соответствии с графиком их выполнения. Первые (одно или два) занятия в семестре, как правило, фронтальные. Выполнение каждой работы условно делится на 3 этапа.

1-й этап – подготовительный по конкретной лабораторной работе во внеаудиторное время. На этом этапе студенты, предварительно самостоятельно ознакомившись с описанием лабораторной работы, начинают оформление протокола работы в своей рабочей тетради: пишут название и цель лабораторной работы и названия выполняемых заданий; записывают (при необходимости выводят) формулы для вычисления результатов измерений и нахождения абсолютных и относительных ошибок прямых и косвенных измерений с расшифровкой всех буквенных обозначений (см. разделы В1 - В4); рисуют таблицы

для записи промежуточных экспериментальных результатов (см. раздел В5). Затем изучают экспериментальную установку и последовательность выполнения лабораторной работы под руководством дежурного инженера вне сетки учебного расписания (самоподготовка), при необходимости внося изменения и дополнения в протокол работы.

2-й этап – выполнение работы: студенты получают теоретический и практический допуски к работе на лабораторных установках и проводят эксперименты. Лабораторная работа считается выполненной, если полностью проведены необходимые измерения и расчеты (см. раздел В6), построены графики (см. раздел В7) и вычислены ошибки измерений, и все это внесено в протокол (протокол оформлен!).

3-й этап – итоговое занятие по теме, на котором студенты объясняют (защищают) результаты, полученные в лабораторных работах, отвечают на вопросы преподавателя, в том числе помещённые в описании работы в разделе «Вопросы и упражнения».

2. Студенты выполняют лабораторные работы по индивидуальному графику, составленному преподавателем в начале семестра. График оформляется студентом в его лабораторной тетради (см. ниже) и служит для контроля и оценки преподавателем деятельности студента на лабораторных занятиях в течение всего семестра. Студент получает зачет по лабораторным занятиям, если полностью выполнил индивидуальный график работы в лабораторном практикуме.

3. Студент не допускается к выполнению очередной лабораторной работы при отсутствии протокола лабораторной работы, а также, если он не имеет защит по двум выполненным ранее работам.

УКАЗАНИЯ ПО ОФОРМЛЕНИЮ РАБОЧИХ ТЕТРАДЕЙ

Первая страница рабочей тетради оформляется студентом до выполнения первой лабораторной работы.

Она должна содержать:

1. В правом верхнем углу: фамилию студента и номер группы.

2. График выполнения лабораторных работ:

Неделя	**I**	**II**	**III**	**IV**	**V**	**VI**	.....	**XVII**
Дата								
№ работы								

3. Таблицу контроля выполнения работ практикума. В ней подписью преподавателя или инженера удостоверятся завершение каждого из этапов

выполнения соответствующих работ:

№ и название лабораторной работы	**Самопод-готовка**	**Допуск**		**Выполнение**	**Защита**
		Теорет.	**Практ.**		

4. Внизу под таблицей оформить строку для регистрации зачета по практикуму:

Зачет по лабораторному практикуму:

_____ Дата и подпись преподавателя

На последующих страницах оформляются протоколы лабораторных работ в соответствии с их описаниями. (*Последовательность записи работ в таблице контроля и протоколов должны соответствовать реальной последовательности выполнения работ*).

18

Лабораторная работа № 1.1[1)]

Простейшие измерения и обработка их результатов

Введение

Измерительные приборы и наши органы чувств несовершенны, поэтому все измерения можно делать только с известной степенью точности. Очевидно, что, измеряя с помощью прибора некоторую величину, мы не можем сделать ошибки меньшими тех, которые определяются погрешностями измерительного устройства! Поэтому в задачу измерений входит не только нахождение самой величины, но также и оценка допущенной при измерении погрешности для подтверждения достоверности полученного результата!

Выбор измерительного прибора определяется его возможностями и допустимой погрешностью измерений, определяемой ценой наименьшего деления прибора и называемой абсолютной ошибкой измерения. Например, штангенциркуль позволяет измерять линейные размеры до 150 мм с точностью до 0,1 мм; микрометр - до 25 мм с точностью до 0,01 мм; электронные весы допускают измерение масс до 200 г с точностью до 0,001 г.

В физическом эксперименте в большинстве случаев непосредственно измеряют не искомую величину A, а некоторые другие величины x, y, z , связанные с ней известным соотношением $A = f(x,y,z)$. Измерение величины A таким методом называется косвенным измерением.

При косвенных измерениях ошибка получаемого значения искомой величины зависит не только от ошибок, допущенных при непосредственных измерениях величин, но и от вида математической функции (формулы) $A=f(x,y,z)$, связывающую искомую величину с непосредственно измеренными величинами. Вычисление ошибок прямых и косвенных измерений подробно рассмотрено во Введении к лабораторному практикуму. При прямых измерениях величии x, y, z (отсчете их значений по измерительным приборам) и оценки их погрешностей (Δx, Δy, Δz) следует руководствоваться следующими правилами, учитывающими особенности зрительного восприятия человека:

1. Если указатель измерительного прибора (стрелка, риска, т.п.) находится между двумя последовательными делениями шкалы, то абсолютная погрешность равна половине цены деления шкалы, так как при отсчете результата по ближайшему делению (производя тем самым округление), мы делаем ошибку не более чем на половину цены деления.

2. Если указатель двигается скачкообразно (механический секундомер), то абсолютная погрешность равна цене деления шкалы.

3. Если границы измеряемого объекта не может быть четко определены (например, "размытое" изображение предмета на экране), то абсолютная погрешность при измерении параметров объекта определяется характером нечеткости его границ и может превышать цену деления измерительного устройства.

[1)] Подготовлено преподавателями КОЭФ Александровым В.Н. и Васильевой И.А., Коротаевой Е.А., Сёмашем В.Д.

В настоящей работе студенты должны приобрести навыки в работе с измерительными инструментами, в аналитической обработке данных эксперимента и в оценке погрешностей прямых и косвенных измерений.

Измерения линейных размеров физических тел являются важнейшими в механике. Поэтому знакомство с техникой измерений в физике мы начинаем с таких приборов, как штангенциркуль и микрометр, в которых применяется шкала нониуса.

Нониусом называется дополнительная шкала, позволяющая повысить точность измерения в 10–20 раз. Линейным нониусом называется маленькая линейка с делениями, которая может скользить вдоль измерительной линейки, называемой масштабом (см. рис.1.1.1, верхняя часть – положение измерительной линейки и нониуса перед проведением измерений).

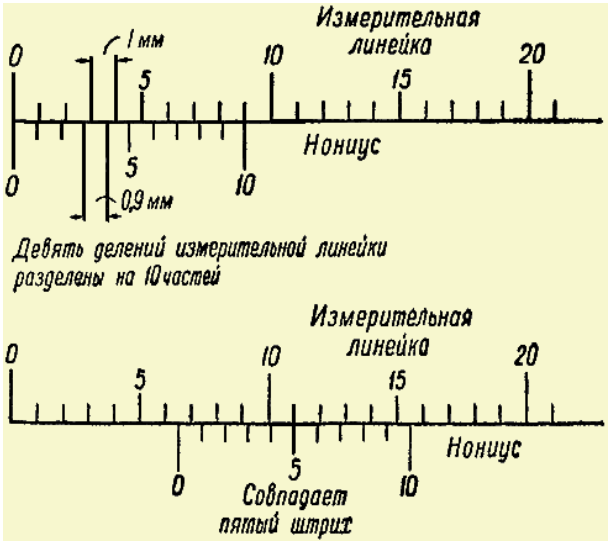

Рис. 1.1.1.

Видно, что нулевые деления измерительной линейки и нониуса совпадают, и деления на нониусе нанесены так, что одно деление нониуса составляет $(m - 1) / m = 1 - 1/m$ делений масштаба, где m – число **делений** нониуса (на рис.1 m =10). Именно поэтому можно, пользуясь нониусом, производить отсчеты с точностью до $1/m$ части наименьшего деления масштаба. Пусть расстояние между соседними штрихами масштаба равно y, между соседними штрихами нониуса x. Тогда $x = y - y / m$ и $m x = (m - 1) y$. Величина $\Delta x = y - x = y / m$ называется точностью нониуса, она определяет максимальную погрешность нониуса. Поэтому для показанного на рис.1 случая легко получить, что y =1 мм, x = 0,9, m = 10 и Δx = 0,1 мм. Часто точность шкалы нониуса указывается либо на ней самой, либо на корпусе измерительного прибора.

Примечание: Иногда число делений на шкале нониуса не совпадает с их числовым обозначением. В этом случае за число m для вычисления точности нониуса принимается общее число делений его шкалы N, без единицы, то есть $m = N - 1$.

При измерениях нулевое деление нониуса сдвигается относительно нулевого деления масштаба (см. пример измерения с помощью шкалы нониуса на нижней части рис. 1.1.1, в котором ноль нониуса располагается между 6 и 7 делениями масштаба). Но одно из делений нониуса всегда совпадает с каким-либо делением масштаба (на рис. 1.1.1 – 5 деление). Поэтому измеренная длина равна 6,5 мм. Во втором примере на рис.1.1.2 измеренная длина равна 44,5 мм. Повышенная точность измерений по нониусу основана на том, что глаз человека способен фиксировать расположение делений нониуса и масштаба друг относительно друга точнее, чем проводить отсчет долей делений измерительной линейки.

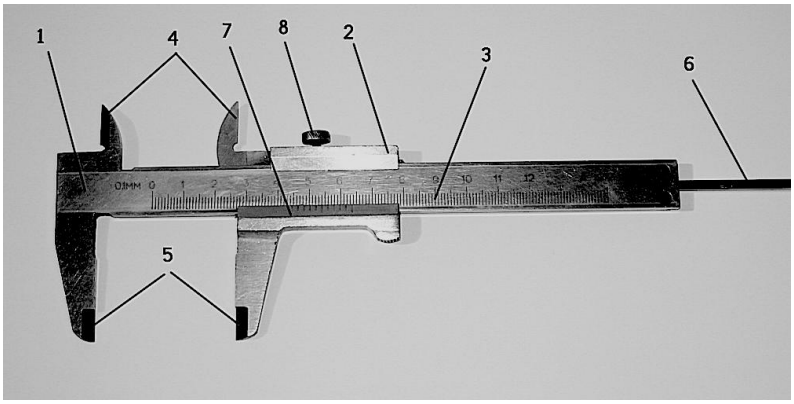

Рис. 1.1.2.

На рис. 1.1.2 представлен один из типов штангенциркулей, в котором для измерения линейных размеров тел с точностью до 0,1 мм используется линейный нониус (7), нанесенный на его движок (2). Измерительная линейка (3) нанесена на корпусе (1). Этот измерительный инструмент может измерять: внешний размер тел с помощью нижних губок (5), диаметр отверстий и ширину прорезей с помощью верхних губок (4) и глубину отверстий и прорезей посредством глубомера (6). Стопорный винт (8) предназначен для фиксации подвижных частей (губок и глубомера) штангенциркуля при разметке или калибровке деталей. Точность некоторых типов серийных штангенциркулей достигает 0,02 мм. Однако у таких штангенциркулей обычно отсутствуют глубомер и верхние губки, а диаметры отверстий и размеры прорезей, начиная с 10 мм, измеряются посредством видоизмененных внешних поверхностей нижних губок (5). Число «10» обычно нанесено на поверхности таких губок и эта величина при измерении прибавляется к измеренным делениям масштаба. Такой штангенциркуль используется в настоящей работе.

На рис. 1.1.3 представлен один из типов микрометров. В этом измерительном инструменте деления измерительной линейки с шагом 1,0 мм (7) нанесены с двух сторон линии (со сдвигом друг относительно друга на 0,5мм) вдоль поверхности цилиндра, называемого стеблем (3). Его шкала нониуса (6) нанесена вдоль левого края барабана (4), так что она перпендикулярна шкале измерительной линейки (7). Все элементы микрометра крепятся на скобе (8), за которую держат инструмент при проведении измерений.

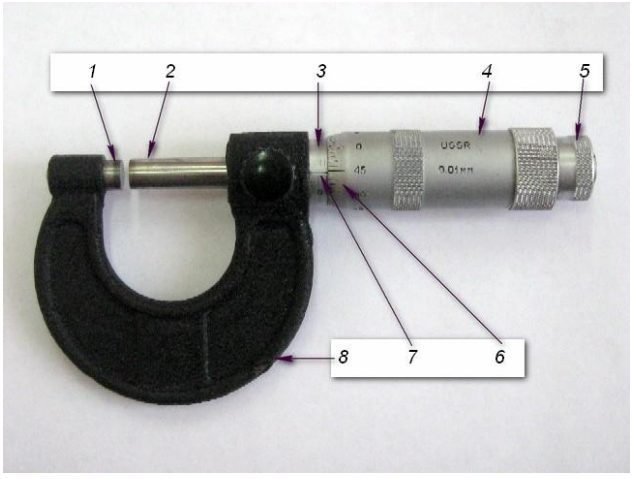

Рис. 1.1.3.

Измерения микрометром проводятся следующим образом. Первоначально совмещаются измерительные поверхности неподвижной пятки (1) и подвижного микрометрического винта (2), вращая (заворачивая) головку с трещоткой (5) по часовой стрелке. Когда поверхности совместятся, головка начинает прокручиваться и щелкает трещотка. После этого необходимо проверить совпадение нулевой риски шкалы нониуса и нулевой риски шкалы линейки, так

как со временем и/или неправильной эксплуатации микрометра может возникнуть это несовпадение. В случае его наличия обратитесь за помощью к инженеру или преподавателю, чтобы в дальнейшем правильно проводить измерения.

После проверки нужно, вращая (отворачивая) барабан (4) против часовой стрелки, развести измерительные поверхности пятки (1) и микрометрического винта (2) на расстояние немного большее линейного размера измеряемого тела, чтобы последнее свободно поместилось между указанными измерительными поверхностями. Затем, заворачивая головку с трещоткой (5), подводятся измерительные поверхности в соприкосновение с телом (когда начнет щелкать трещотка) и вычисляется результат измерения по значениям на шкалах линейки стебля (7) и нониуса барабана (6).

Во время подготовки к проведению измерений при отворачивании барабана обратите внимание на то, что один полный оборот барабана приводит к сдвигу микрометрического винта (2) на 0,5 мм – половине нижнего деления шкалы измерительной линейки (7), и появлению первого штриха верхних делений этой шкалы. Поэтому одно деление (точность) шкалы нониуса соответствует: 0,5 мм / 50 дел = 0,01 мм, что указано на барабане (4).

На рис. 1.1.4 приведен в качестве примера результат некоторого измерения. Видно, что полученный размер тела по показаниям шкал линейки и нониуса равен, соответственно: 5,5 мм + 0,46 мм = 5,96 мм (а на рис. 1.1.3 — 1,94 мм).

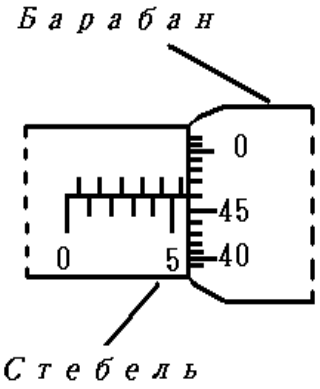

Рис. 1.1.4.

Примечание: Во избежание повреждений изучаемого тела и его поверхности, а также измерительных поверхностей и механизма микрометра закручивание микрометрического винта (2) разрешается проводить только посредством головки с трещоткой (5). Точность современных механических микрометров с рычажным нониусом достигает 2 мкм!

Рис. 1.1.5.

Рис. 1.1.6.

Для изучения электрических сигналов (напряжения) используется электронный осциллограф, например **С1-1** (рис. 1.1.5). Этот прибор позволяет визуализировать на экране электронно-лучевой трубки (далее экран) временные зависимости этих сигналов и определить их характеристики: форму (постоянный или переменный, синусоидальный или пилообразный и т.д.) амплитуду A, период T (а значит и частоту $f = 1/T$) и др. На экране осциллографа имеется сетка для проведения измерений. Ручки управления прибором вынесены на его лицевую панель и надписи около них указывают на их назначение, например, около тумблера включения прибора находится надпись «СЕТЬ». С правилами и порядком работы с осциллографом студенты знакомятся на занятии под руководством преподавателя или инженера.

Для получения переменного электрического напряжения часто используются электронные генераторы (например, **Г3-118**), которые при диапазоне частот генерируемого ими сигнала 1 Гц ÷ 60 кГц называются звуковыми (рис. 1.1.6). Ручки управления прибором вынесены на его лицевую панель и надписи около них указывают на их назначение, например, около тумблера включения прибора находится надпись «СЕТЬ». С правилами и порядком работы с генератором студенты знакомятся на занятии под руководством преподавателя или инженера.

Лабораторная работа № 1.1 является фронтальной и проводится под руководством преподавателя.

Экспериментальные задачи, поставленные в работе:

- проведение прямых измерений линейных размеров тел и их масс,
- проведение косвенное измерение плотности материала кольца и определение вида материала по таблице плотностей,
- обработка экспериментальных результатов и вычисление точности прямых и косвенных измерений,
- проведение простейших измерений с использованием электронного осциллографа и звукового генератора.

ИЗМЕРЕНИЯ И ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ

З а д а н и е 1. Определение плотности материала кольца

Перед началом выполнения работы ознакомьтесь с разделами **В1 - В3** в [1].

Плотность полученного в начале выполнения работы кольца рассчитывается на основе результатов измерений его массы m и линейных размеров по формуле:

$$\rho = 4m/(\pi h[D^2 - d^2]), \qquad (1)$$

где D и d - большой и малый диаметры кольца, соответственно, h - толщина кольца.

Для выданного вам кольца проведите необходимые измерения: толщину кольца (h) измерьте микрометром, внешний и внутренний диаметры кольца (D и d) – штангенциркулем, записывая их в тетради в соответствующие таблицы.

Масса (m) кольца измеряется с помощью электронных весов (с порядком проведения измерения на электронных весах студент знакомится на занятии, измерение проводится один раз и его результат и приборная ошибка измерения записываются в табл. 4).

Ниже приведена, в качестве примера, таблица для результатов измерения h – табл. 1. В ней помещаются: результаты измерения толщины h_i, её среднее значение $\overline{h}$, случайная ошибка измерения Δh_i, средняя случайная ошибка $\overline{\Delta h}$, систематическая (инструментальная или приборная) ошибка измерения $\Delta h_{пр}$; отношение последних δ, абсолютная Δh и относительная ε_h ошибки прямых измерений толщины h. При этом если $\delta < 0{,}3$, то $\Delta h = \overline{\Delta h}$; если $\delta > 3$, то $\Delta h = \Delta h_{пр}$; в промежуточном случае $\Delta h = \sqrt{\left(\Delta h_{\text{пр}}\right)^2 + \left(\overline{\Delta h}\right)^2}$ (см. (21) в В4 [1]).

Табл. 1.

N	h_i, $\times 10^{-3}$м	Δh_i, $\times 10^{-5}$м	$\overline{h}$ = _____ $\times 10^{-3}$м
1			$\overline{\Delta h}$ = _____ $\times 10^{-5}$м
2			$\Delta h_{пр}$ = _____ $\times 10^{-5}$м
3			$\Delta h_{пр} / \overline{\Delta h} = \delta$ = _____
Δh = _____ $\times 10^{-5}$м			ε_h = _____ %

В аналогичные табл. 2 и 3 для d и D (полученные путем замены буквы h на d и D, соответственно) внесите результаты соответствующих измерений и вычислений. Измерение массы кольца можно провести один раз, а их результат и соответствующие ошибки измерения запишите в тетради.

Вычислите плотность кольца и определите по справочнику, из какого материала изготовлено кольцо. Рассчитанную относительную ошибку ε_ρ косвенных измерений (см. **В4** в [1] и ***Приложение к заданию 1***) плотности кольца и занесите в табл. 4 основные результаты измерений и вычислений.

Табл. 4.

Внешн. $\overline{D} \pm \Delta D$ (м)	Внутр. $\overline{d} \pm \Delta d$ (м)	Толщина $\overline{h} \pm \Delta h$ (м)	Масса $m \pm \Delta m$ (кг)	Плотность $\rho \pm \Delta\rho$ (кг/м^3)	$\varepsilon_\rho = \frac{\Delta\rho}{\rho}$ (%)	Материал образца

Приложение к заданию 1

1. Если случайная ошибка какого-либо прямого измерения меньше систематической (приборной) ошибки этого же измерения, то в абсолютной ошибке этого измерения учитывается лишь систематическая ошибка (см. [1]).

2. Для правильного определения относительной ошибки косвенных измерений плотности ρ сначала необходимо ознакомиться с разделом **B4** в [1], а затем строго выполнять порядок действий, вычислений и записи результатов, которые приведены в ниже следующем примере.

Пусть в результате измерений получены следующие результаты:

$m = 4{,}789 \pm 0{,}001$ г; $h = 1{,}55 \pm 0{,}01$ мм; $d = 18{,}85 \pm 0{,}05$ мм; $D = 43{,}45 \pm 0{,}05$ мм,

где после символа «±» стоят точности измерения весов, микрометра и штангенциркуля, соответственно (систематическая ошибка больше случайной).

Далее необходимо вычислить относительные ошибки прямых измерений:

$$\varepsilon_m = \frac{\Delta m}{m} = 2{,}09\cdot10^{-4}; \quad \varepsilon_h = \frac{\Delta h}{h} = 6{,}45\cdot10^{-3}; \quad \varepsilon_d = \frac{\Delta d}{d} = 2{,}65\cdot10^{-3}; \quad \varepsilon_D = \frac{\Delta D}{D} = 1{,}15\cdot10^{-3}.$$

Затем вычисляется «вклад» каждого прямого измерения в общую относительную ошибку косвенного измерения плотности ρ, используя формулу (1), а именно:

$$\varepsilon_{\rho m} = \frac{1}{\rho}\cdot\left|\frac{\partial\rho}{\partial m}\right|\cdot\Delta m = \frac{\Delta m}{m} = \varepsilon_m = 2{,}09\cdot10^{-4}; \qquad \varepsilon_h = \frac{1}{\rho}\cdot\left|\frac{\partial\rho}{\partial h}\right|\cdot\Delta h = \frac{\Delta h}{h} = \varepsilon_h = 6{,}45\cdot10^{-3};$$

$$\varepsilon_{\rho d} = \frac{1}{\rho}\cdot\left|\frac{\partial\rho}{\partial d}\right|\cdot\Delta d = \frac{2d^2}{(D^2-d^2)}\cdot\frac{\Delta d}{d} = \boldsymbol{a}_d\cdot\varepsilon_d = 0{,}46\cdot2{,}65\cdot10^{-3} = 1{,}23\cdot10^{-3};$$

$$\varepsilon_{\rho D} = \frac{1}{\rho}\cdot\left|\frac{\partial\rho}{\partial D}\right|\cdot\Delta D = \frac{2D^2}{(D^2-d^2)}\cdot\frac{\Delta D}{D} = \boldsymbol{a}_D\cdot\varepsilon_D = 2{,}46\cdot1{,}15\cdot10^{-3} = 2{,}83\cdot10^{-3}.$$

Теперь можно посчитать относительную ошибку косвенных измерений ρ:

$$\varepsilon_\rho = \sqrt{\varepsilon_{\rho m}^2 + \varepsilon_{\rho h}^2 + \varepsilon_{\rho d}^2 + \varepsilon_{\rho D}^2} = 7{,}15\cdot10^{-3}.$$

Результаты вычислений показывают, что основной вклад в относительную ошибку косвенных измерений плотности кольца вносит измерение толщины кольца микрометром!

Тогда получим, что абсолютная ошибка $\Delta\rho = \rho\cdot\varepsilon_\rho$ и плотность материала кольца равна:

$$\rho = (2{,}57 \pm 0{,}02)\cdot10^3 \text{ кг/м}^3.$$

Задание 2. Простейшие измерения с использованием электронного осциллографа и звукового генератора

Измерение 1. Наблюдение зависимости напряжения контрольного сигнала от времени

В используемом осциллографе (**C1-1**) на клемму «контр. сигнал» подается переменное напряжение $U \approx 2$ В и частотой $f_{\text{г.с.}} = 50$ Гц – пониженное напряжение городской сети ($U_{\text{г.с.}} = 220$ В).

Для наблюдения контрольного напряжения студенты под наблюдением преподавателя или инженера выполняют следующие действия:

1) Включите осциллограф.

2) Пока прибор «прогревается», поставьте ручки:

«синхронизация» в положение «от сети»;

«ослабление» - «1:10»; «диапазоны частот» - «выкл».

3) В центре экрана появляется светящаяся точка – прибор готов к работе. Если эта точка не появляется или не совпадает с центром сетки экрана, то ручками «ось Y» и «ось X» добейтесь этого. Поставьте ручку «диапазоны частот» в положение «2» - включается генератор развертки и светящаяся точка начинает двигаться горизонтально от левого края экрана к правому за время, периодом развертки - $T_{разв}$. Поставьте эту ручку в положение «30» - на экране появляется горизонтальная светящаяся линия.

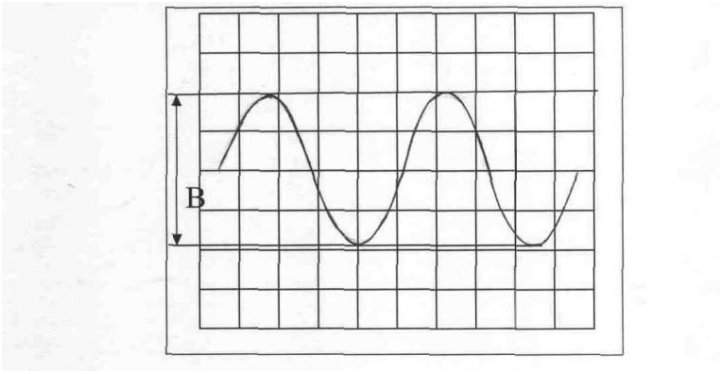

Рис. 1.1.7.

4) Соедините проводом клемму «контр. сигнал» с клеммой «вход», находящейся ниже первой, и на экране появится изображение сигнала - «синусоида» (рис. 1.1.7). Далее добейтесь ручками: «амплитуда синхронизации», чтобы изображение не двигалось по экрану; «частота плавно», чтобы на экране помещалось не менее 4 – 5 периодов сигнала; «усиление», находящейся ниже ручки «ослабление», чтобы амплитуда сигнала составляла 2 ÷ 3 см (см. рис.1.1.7: для синусоиды A = B/2).

Подсчитайте, сколько периодов n переменного напряжения наблюдается на экране. Из рис. 1.1.7 видно, что время развертки $T_{разв}$ равно $nT_{г.с.}$. Зная частоту городской сети, вычислите частоту разверти - $f_{разв}$. Вычисления и их результат запишите в тетради.

Не выключая осциллограф, отсоедините провод, соединяющий клемму «контр сигнал» с клеммой «вход» по оси Y, и приступайте к ***измерению 2.***

Измерение 2. Наблюдение формы переменного сигнала от генератора звуковой частоты

На осциллографе установите ручку «синхронизация» в положение «внутр». Включите генератор сигналов низкочастотный **Г3-118** (далее генератор) и установите на нем ручки: «множитель» в положение «1», частота «Hz» - «50,0», а выходное напряжение «dB» - «20».

Соедините кабелем выход «II» генератора с клеммами входа Y осциллографа. Добившись ручкой осциллографа «амплитуда синхронизация» устойчивой картинки, а его ручкой «усиление» амплитуду сигнала 2 ÷ 3 см, получим на экране картинку, имевшуюся в ***Измерении 1***.

Установите на генераторе произвольную частоту в диапазоне 0,2÷2 кГц и запишите это значение в тетради. Подбирая частоту синхронизации (ручками «диапазоны частоты» и «частота плавно») и амплитуду синхронизации ручкой под тем же названием, получите на экране осциллографа устойчивые картинки, соответствующие одному, двум и пяти периодам исследуемого сигнала. Зная частоту генератора, рассчитайте частоты развертки, необходимые для получения этих устойчивых картинок, и запишите их тетради.

Выключите приборы и отсоедините соединяющий их кабель.

***Рекомендуемая литература*:**

1. Введение в физический практикум.

Примерные контрольные вопросы

1. Какими приборами (измерительными инструментами) следует пользоваться при измерении толщины и диаметров кольца?

2. Как создать линейную шкалу нониуса, позволяющий повысить точность измерений с данным масштабом в *n* раз?

3. Какое из прямых измерений в работе дает максимальную относительную погрешность?

4. С какой точностью достаточно измерять массу кольца?

5. Какие виды ошибок измерения Вы знаете?

6. Как находятся абсолютные и относительные ошибки прямых измерений?

7. Какие измерения называются прямыми, а какие косвенными?

8. Как вычисляются относительные ошибки косвенных измерений?

9. Какие требования предъявляются к записи результатов измерений?

10. Какова должна быть точность вычислений и как можно избежать случайных ошибок при вычислениях?

11. Каковы правила выбора масштабов при построении графиков?

12. Какую дополнительную информацию о физическом явлении можно получить из графиков экспериментальных данных?

13. Почему в настоящей работе массу кольца рекомендовано измерять один раз, его линейные размеры не менее трёх?

14. Почему полученная в работе плотность материала кольца не совпадает со значением плотности подобного материала в справочнике?

15. Какова последовательность вычислений косвенных ошибок измерений?

16. Почему ручка «синхронизация» в ***Измерении 1*** ставится в положении «от сети», а в ***Задании 2*** в положение «внутр».

Лабораторная работа № 1.2[1)]

Изучение прямолинейного движения с помощью машины Атвуда

Введение

Согласно первому закону Ньютона, в инерциальной системе отсчета материальная точка движется равномерно и прямолинейно, если равнодействующая сил, приложенных к ней, равна нулю, а начальная скорость υ_0 отлична от нуля. При изучении прямолинейного движения систему координат удобно выбирать так, чтобы положительное направление одной из осей (например, оси *X*) совпадало с направлением перемещения (скорости) точки. Скорость такого движения не зависит от времени и равна:

$$\upsilon = (x_2 - x_1) / t,$$

где x – координата точки, $x_2 - x_1$ – расстояние, пройденное точкой за время t.

Если равнодействующая всех сил $\vec{F}_\Sigma$, приложенных к материальной точке, не равна нулю и постоянная, то движение точки равнопеременное или с постоянным ускорением a. В дальнейшем будет применяться термин «равноускоренное движение», так как в выбранной в работе системе отсчета наблюдается движение с $a>0$. Уравнение такого движения называется вторым законом Ньютона и имеет вид:

$$\vec{F}_\Sigma = m\vec{a},$$

где m – масса движущейся точки (тела).

Если векторы $\vec{F}_\Sigma$ и $\vec{\upsilon}_0$ лежат на одной прямой, то движение материальной точки (тела) будет прямолинейным вдоль выбранной ранее оси *X*.

В этом случае закон движения будет иметь вид: $x = x_0 + \upsilon_0 t + \frac{at^2}{2}$;

мгновенное значение скорости равно: $\upsilon = \frac{dx}{dt} = \upsilon_0 + at$;

мгновенное значение ускорения равно: $a = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$.

Если в момент времени $t = 0$ значения $x_0 = 0$ и $\upsilon_0 = 0$, то проведя измерения пути, проходимого материальной точкой (x), и промежутка времени (t), в течение которого этот путь пройден можно рассчитать значения скорости и ускорения в конце пути как $\upsilon = 2x/t$ и $a = 2x/t^2$, соответственно.

В работе определяются кинематические характеристики (скорость, ускорение) движения пробных тел (грузов) и проверяются динамические соотношения, вытекающие из второго закона Ньютона: зависимость между силой и ускорением при постоянной массе системы. Экспериментальная установка (так называемая машина Атвуда) позволяет получить прямолинейное равномерное и равноускоренное движение грузов.

[1)] Подготовлено преподавателями КОЭФ Александровым В.Н., Васильевой И.А., Коротаевой Е.А., и Сёмашем В.Д.

Экспериментальные задачи, поставленные в работе:

- экспериментальное изучение законов прямолинейного движения тел;
- определение мгновенной и средней скорости и мгновенного ускорения движущегося тела;
- применение правил вычисления ошибок прямых и косвенных измерений.

Описание экспериментальной установки

Машина Атвуда представляет собой вертикальную металлическую стойку (рис. 2.1), на верхнем конце которой установлен легкий алюминиевый блок. Через блок перекинута нить, к концам которой подвешены основные грузы *1* одинаковой массы по $m_{ОСН}$ = 140 г каждый.

По всей длине стойки могут передвигаться и фиксироваться на произвольной высоте (с помощью стопорных винтов СВ) две платформы $П_1$ и $П_2$ с отверстиями, через которые проходит правый груз во время движения. Положение платформ определяет отрезки пути, проходимые грузом при движении системы. Для их отсчета на передней стенке стойки имеется шкала с сантиметровыми делениями. Исходному положению системы соответствует нулевое деление, расположенное в верхней части стойки. Требуемое значение соответствующей координаты считывается со шкалы рейки по риске в окошке передней грани каждой платформы.

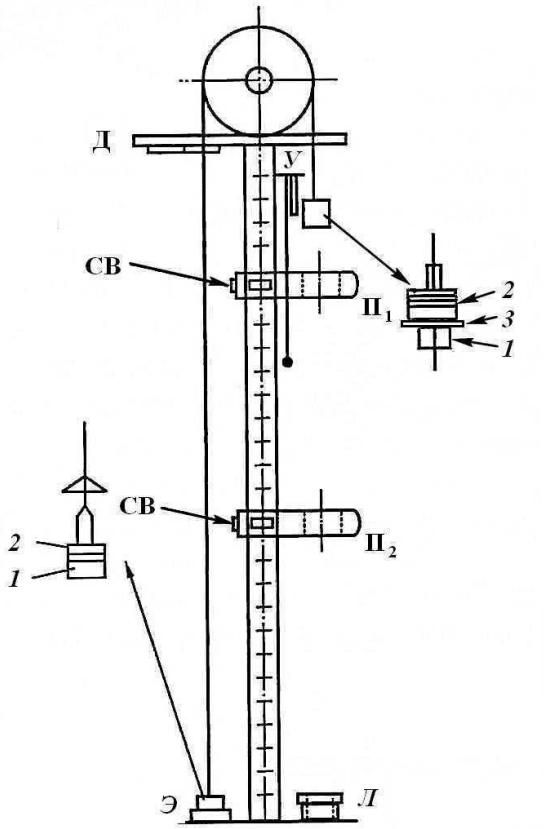

Рис. 2.1.

В комплект установки входит набор добавочных грузов *2* различной массы, которые экспериментатор может устанавливать на шейках основных грузов. Если суммарная масса правых грузов больше, чем суммарная масса левых, то под действием силы тяжести, обусловленной этой разностью масс, система приходит в движение – правые грузы опускаются, а левые поднимаются. Движение грузов при этом является равноускоренным.

В комплект приспособлений также входит фигурная (съемная) шайба *3* массой 5 г, которая должна быть установлена на правый груз первой, а уже на нее устанавливаются добавочные грузы $m_{ПР}$. Диаметр шайбы больше отверстия в платформах. Поэтому при прохождении первой платформы шайба вместе с дополнительными грузами задерживается платформой и дальнейшее движение становится равномерным (так как массы основных грузов справа и слева одинаковы). Шайба и добавочные грузы имеют прорези для прохождения нити

при их установке на шейках основных грузов *1*. Масса добавочных грузов в граммах выбита на их поверхности.

В исходном состоянии система удерживается при помощи электромагнита *Э*, фиксирующего левый груз в нижнем положении. Успокоитель *У,* расположенный в верхней части стойки, служит для гашения колебаний правого груза перед началом движения (приводится в действие вручную с помощью шнура).

В верхней части стойки расположен демпфер (Д), который амортизирует удар при остановке левого груза, предотвращая обрыв нити. В нижней части установки находится ловушка (*Л*), которая захватывает правый груз в конце движения. Освобождение груза из ловушки осуществляется нажатием на кольцо, расположенное в верхней части ловушки.

Для отсчета времени прохождения правым грузом отрезков пути от начальной точки движения до середины верхней платформы (x_1) и от неё до середины нижней платформы (x_2) служат два электронных секундомера. Внутри платформ вмонтированы источники света и фоторезисторы для управления секундомерами. В момент начала движения грузов включается первый секундомер. Проходя через платформу $П_1$, груз пересекает световой луч, падающий на фоторезистор, и отключается первый секундомер, измеряющий время t_1 – время прохождения грузом участка x_1, и включается второй секундомер. Последний отключается в момент прохождения груза через отверстие платформы $П_2$, измеряя время t_2 – время прохождения грузом участка x_2. Цифровая индикация результатов измерения секундомеров включается после прохождения правым грузом платформы $П_2$.

На стене рядом с установкой располагается щиток управления, на котором находятся: тумблер «вкл» включения электропитания элементов установки (электромагнита, электроники, источников света и т.п.); кнопка «пуск» отключения электромагнита и включения секундомеров; цифровая индикация секундомеров.

Примечание. В лабораторном практикуме имеются две симметричные лабораторные установки: «*правая*» и «*левая*». На рис. 2.1 изображена и далее в тексте дано описание работы *правой* установки, в которой платформы, успокоитель и ловушка находятся справа от металлической стойки, а электромагнит и демпфер слева от нее. В случае *левой* установки эти элементы установки перенесены справа налево или слева направо относительно металлической стойки, соответственно.

Подготовка протокола к работе

(*Выполняется во внеаудиторное время при подготовке к занятию*)

Запишите в лабораторной тетради номер и название работы.

Запишите в тетради заголовок: «***Задание 1. Определение ускорения и мгновенной скорости равноускоренного движения***».

Запишите расчетные формулы с расшифровкой буквенных обозначений для вычисления:

- экспериментального значения ускорения a_1 на первом участке движения грузов;

- экспериментального значения мгновенной скорости $\upsilon_У$ ускоренного движения грузов в конце первого участка;

- экспериментального значения скорости $\upsilon_Р$ грузов на втором участке.

Подготовьте табл. 1.

Табл. 1.

Масса правых добавочных грузов + шайбы, $\times 10^{-3}$кг	Равноускоренное движение						Равномерное движение			
	x_1, м	t_1, с	a_i, м/с^2	$a_{ср}$, м/с^2	$\upsilon_{y\,i}$, м/с	$\upsilon_{y\,\text{ср}}$, м/с	x_2, м	t_2 с	$\upsilon_{P\,i}$, м/с	$\upsilon_{p\,ср}$, м/с
10	0,5						0,5			
	1,0						0,5			
15	0,5						0,5			
	1,0						0,5			
20	0,5						0,5			
	1,0						0,5			

Оставьте свободное место в тетради для вспомогательных записей и вычислений.

Запишите в тетради заголовок: «***Задание 2***. ***Определение зависимости ускорения системы грузов постоянной массы от разности масс грузов***».

Запишите расчетные формулы с расшифровкой буквенных обозначений для вычисления:

- теоретического значения ускорения $a_{теор} = g\,\Delta m\,/M$, учитывая, что сила, ускоряющая тела, постоянная и пропорциональна разности масс добавочных грузов $\Delta m = m_{ПР} - m_{ЛЕВ}$;

- суммарной массы всех движущихся грузов $M = 2m_{\text{ОСН}} + m_{ПР} + m_{ЛЕВ}$;

- расчета погрешностей в определении ускорения Δa (см. ***Приложение*** к настоящей работе).

Подготовьте табл. 2.

Табл. 2.

№	Масса левых доб. грузов - $m_{ЛЕВ}$, $\times 10^{-3}$ кг	Масса правых доб. грузов - $m_{ПР}$, $\times 10^{-3}$ кг	Δm, г	$\Delta m/M$	$t_{1ср}$, с	$a_{i,эксп}$, м/с^2	Δa_i, м/с^2
1.	20	25					
2.	20–5=15	25+5=30					
3.	15–5=10	30+5=35					
4.	10–5=5	35+5=40					
5.	5–5=0	40+5=45					

Рассчитайте и запишите в тетради общую массу системы грузов *M*.

Ознакомьтесь с расположением элементов установки и щитком управления.

Измерения и обработка результатов

Задание 1

Освободите стопорный винт (СВ на рис. 2.1) верхней платформы $П_1$, установите платформу на высоте на отметке 0,5 м (x_1 = 0,5 м) и закрепите стопорным винтом. Аналогичным образом установите нижнюю платформу $П_2$ на высоте 1 м (x_2 = 0,5 м).

Включите установку тумблером «вкл». Поднимите правый груз над первой платформой и наденьте на него сначала съемную шайбу плоской стороной вниз, а затем на нее добавочный груз массой 5 г. Потяните вниз левую часть нити до тех пор, пока левый груз своим основанием не установится на электромагнит, и система не зафиксируется в этом положении. Пользуясь шнуром (см. рис.2,1), который поднимает флажок успокоителя (*У*), погасите колебания правого груза.

Нажмите кнопку «пуск». При этом отключается электромагнит, система грузов приходит в движение, и включаются секундомеры. После прохождения второй платформы правым грузом, на их дисплеях высвечиваются значения времен t_1 и t_2, а груз, опускаясь, попадает в ловушку (*Л*).

После записи результатов в табл.1, освободите правый груз из ловушки, нажав на ее верхнее кольцо, поднимите за нить этот груз над верхней платформой и проделайте новые операции по установке на шайбу *3* добавочных грузов *2*.

Примечание: По рекомендации и под наблюдением инженера правый груз может быть остановлен другим способом, после прохождения платформы $П_2$ до попадания в ловушку *Л*.

Проведите по три измерения для каждого значения дополнительных грузов и положения платформ, которые указаны в левых столбцах табл. 1. Причем, сначала проведите измерения со всеми перегрузками при x_1 = 0,5 м, а затем при x_1 = 1,0 м, переместив платформу $П_2$ на 0,5 м ниже, чтобы сохранить x_2 = 0,5 м.

Вычислите для каждого эксперимента мгновенную скорость в конце равноускоренного движения $\upsilon_У$, ускорение *a* и скорость равномерного движения

v_P. Для каждой группы измерений (с данным грузом) вычислите средние значения этих величин.

Выпишите значения приборных ошибок измерений расстояний x_1 и x_2, а также измерений времени. Определите случайную ошибку измерения времени для одного из экспериментов (например, для разности масс грузов $15 \cdot 10^{-3}$ кг и $x_1 = 0{,}5$ м) и сравните ее с приборной.

Убедитесь, что измерения проведены правильно: среднее значение мгновенной скорости движения грузов в конце первого участка практически совпадает со средней скоростью равномерного движения на соответствующем втором участке, для каждого набора добавочных грузов ускорения в соответствующих измерениях практически одинаковы, при увеличении расстояния x_1 скорость при одинаковой массе добавочных грузов в конце ускоренного движения увеличивается, и переходите к выполнению ***Задания 2***.

Задание 2

Установите платформу $П_1$ при $x_1 = 1$ м, а платформу $П_2$ на 2 – 3 см ниже $П_1$.

Установите на правом и левом основных грузах добавочные грузы в соответствии с первой строкой табл. 2 (съемная шайба *3* (см. рис. 2) в ***Задании 2*** не используется).

Измерьте время t_1 ускоренного движения системы для данного распределения грузов по аналогии с выполнением ***Задания 1***.

Повторите измерения, устанавливая добавочные грузы в соответствии второй, третьей и т.д. строкой табл.2. При этом меняется разность масс грузов, то есть сила, ускоряющая грузы, а масса системы остается неизменной.

Рассчитайте для каждого случая разность масс грузов, отношение $\Delta m/M$, ускорение $a_{i,эксп}$ (по аналогии с ***Заданием 1***) и погрешности Δa_i, используя данные об ошибках прямых измерений расстояний и времени из ***Задания 1***.

Построение графика

Постройте график зависимости ускорения $a_{эксп}$ от $\Delta m/M$, выполняя следующую последовательность действий:

- определите максимальное значение $\Delta m/M$ (например, 0,122);

- округлите его до ближайшего двузначного значения (до 0,13);

- определите удобное число делений на горизонтальной оси (13 из расчета 1 деление = 0,01);

- выберите удобный для построения масштаб по горизонтальной оси так, чтобы примерно на ширине листа, используемого для построения графика, помещалось данное число делений (например, 1см = 0,01);

- нанесите эти деления на ось и подпишите соответствующие им значения $\Delta m/M$; при этом подписывать нужно не каждое деление, например, 0; 0,01 (цена делений); 0,05; 0,10; 0,15 и т. д.;

- аналогично нанесите деления на вертикальную ось для ускорения a;

- отложите на горизонтальной оси первое значение $\Delta m/M$ и проведите вверх тонкую вертикальную линию, подписывать численное значение $\Delta m/M$ при этом не следует;

- отложите по вертикальной оси соответствующее значение ускорения, проведите на этом уровне тонкую горизонтальную линию до пересечения с вертикальной;

- отметьте точку пересечения каким-либо значком, например, крестиком;

- повторите построение экспериментальных точек для всех значений $\Delta m/M$;

- отложите вверх и вниз от экспериментальных точек $a_{i,эксп}$ соответствующие им значения Δa_i и соедините их вертикальной линией;

- проведите прямую линию из начала координат и проходящую через области экспериментальных значений ускорения $a_{i,эксп} \pm \Delta a_i$.

Вычислите теоретическое значение ускорения для каждого значения $\Delta m/M$, нанесите на тот же график соответствующую точку, обозначив ее другим значком, например, кружком и постройте теоретическую зависимость a от $\Delta m/M$, проведя прямую линию через эти точки и начало системы координат.

Приложение

Абсолютная ошибка косвенного измерения ускорения $a_{i,эксп}$ равна $\Delta a_i = \varepsilon_a \cdot a_{i,эксп}$, где ε_a – относительная ошибка косвенного измерения a_i (см. раздел **B4** [5]):

$$\varepsilon_a^2 = \varepsilon_x^2 + 4\varepsilon_t^2 \,. \qquad (5)$$

В (5) ε_x и ε_t – относительные ошибки прямых i – ых измерений координаты x и времени t, соответственно.

***Рекомендуемая литература*:**

1. Гершензон Е.М., Малов Н.Н., Мансуров А.Н. Курс общей физики. Механика» (2001), гл. I, § 1.1 – 1.7, гл. II, § 2.1 – 2.7.

2. Иродов И.Е., Механика. Основные законы (11-е изд., 2013), гл.1, § 1.1, 1.2, гл. 2, § 2.2 – 2.4.

3. Савельев И.В. Курс общей физики в 5 томах, т. 1, Механика (5-е изд., 2011), гл.1, § 1.1 – 1.4, гл. 2, § 2.1 – 2.5.

4. Сивухин Д.В. Общий курс физики в 5-ти томах, т. 1, Механика (4-е изд., 2005), гл. I, II, гл. III, § 18, 19.

5. Введение в физический практикум.

Примерные контрольные вопросы

1. Получите расчетную формулу для $\upsilon_{мгн}$ в ***Задании 1***.

2. Запишите уравнение движения для движущихся тел системы (см. задачу 4.58 в «Механика. Задачи и решения»/ А.Б. Казанцева, М.С. Каменецкая, В.Н. Александров и др. – М. КолосС, 2005).

3. Определите силу натяжения нити, связывающей грузы, и силу давления на ось блока при равномерном и ускоренном движениях системы. Получите расчетные формулы (без учета массы блока).

4. Получите расчетную формулу для определения силы давления груза на держатель груза.

5. Постройте графики зависимости координаты, скорости и ускорения правого груза от времени на участках равноускоренного и равномерного движений.

6. Постройте графики зависимости координаты, скорости и ускорения центра масс системы грузов от времени на участках равноускоренного и равномерного движений.

7. Объясните полученные соотношения между средней мгновенной скоростью движения грузов в конце первого участка и средней скоростью равномерного движения на втором участке в ***Задании 1***.

8. Объясните, почему для каждого набора добавочных грузов ускорения в соответствующих измерениях в ***Задании 1*** практически одинаковы.

9. Почему при увеличении расстояния x_1 в ***Задании 1*** скорость при одинаковой массе добавочных грузов в конце ускоренного движения увеличивается?

10. Как оценить случайную ошибку в измерении ускорения a (***Задание 2***)? Случайная или систематическая ошибка определяет точность измерения a?

11. Можно ли говорить о равномерном движении, если величина скорости остается постоянной?

12. Как вычислить с помощью графика зависимости ускорения $a_{эксп}$ от $\Delta m/M$ ускорение свободного падения?

13. Почему величины скорости и ускорения правого и левого грузов машины Атвуда в любой момент времени одинаковы?

14. Как рассчитать натяжение нитей при движении грузов машины Атвуда на участке x_1 и на участке x_2?

15. Объясните расхождение зависимостей $a_{эксп}$ и $a_{теор}$ от величин $\Delta m/M$.

16. Сравните и объясните результаты вычислений относительных ошибок измерений.

17. Как рассчитать ускорение тела, соскальзывающего с наклонной плоскости, если а) трение отсутствует; б) коэффициент трения равен k?

18. Как изменится сила давления пассажира на пол лифта, если лифт начнет: а) подниматься с ускорением; б) опускаться с ускорением; в) тормозиться после равномерного подъема; г) тормозиться после равномерного спуска?

Лабораторная работа № 1.3[1)]

Измерение скорости движения пули

Введение

В работе используются два метода измерения скорости полета пули: кинематический и динамический.

Кинематический метод (см. рис. 3.1) основан на том, что за время t, в течение которого пуля пролетает известное расстояние d между равномерно вращающимися бумажными дисками, они поворачиваются на угол φ. На рис. 3.1 точки A и A', в которых пуля пробила бы диски, если бы они были неподвижны.

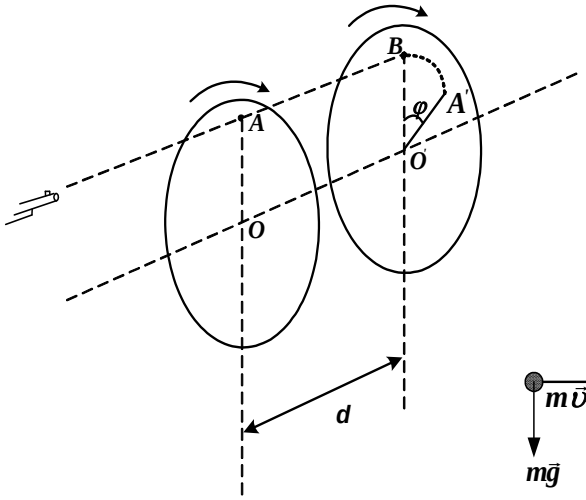

Рис. 3.1.

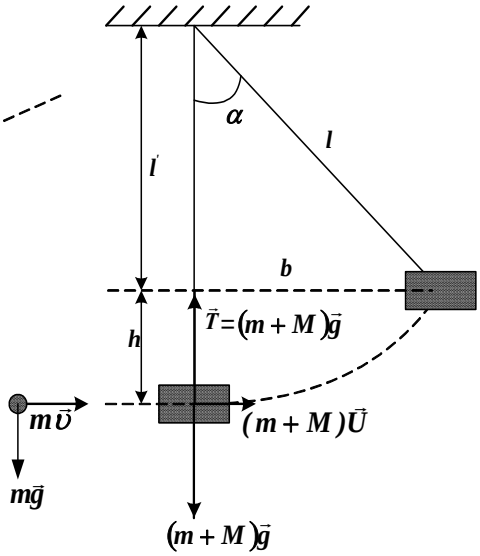

Рис. 3.2.

В случае вращающихся дисков пуля пробивает второй диск в точке B. Тогда, записав соответствующие кинематические соотношения для движения пули между дисками и вращения дисков, легко получить, что скорость пули v находится по формуле

$$v = \omega d/\varphi, \qquad (1)$$

где ω – угловая скорость вращения дисков.

В ***динамическом*** методе скорость пули определяется по отклонению маятника b после неупругого столкновения его с летящей пулей (см. рис. 3.2), причем считается, что $b<<l$. Этот метод позволяет с помощью законов сохранения импульса и энергии рассчитать скорость пули (см. [5]). Рассмотрим момент соударения пули с массивным маятником. Рассматриваемая система тел не является замкнутой, так как на нее действуют внешние силы: силы тяжести пули и маятника и сила натяжения нити маятника, пренебречь которыми нельзя. Однако в момент соударения проекции этих сил на горизонтальную ось равны нулю, следовательно, сохраняется проекции механического импульса на горизонтальную ось OX – направление полета

[1)] Подготовлено преподавателями КОЭФ Александровым В.Н., и Васильевой И.А. и Коротаевой Е.А.

пули. Поэтому, записав для пули и системы «пуля + маятник» закон сохранения импульса вдоль оси *OX* (см. рис. 3.2) и учитывая, что масса маятника *M* много больше массы пули *m* (*M* >> *m*), можно получить, что скорость системы *u* после удара равна:

$$u = m\upsilon / (M + m) \approx m\upsilon / M, \qquad (2)$$

где υ – скорость пули до удара.

После удара пули маятник, получив скорость *u*, отклонился на угол α (см. рис. 3.2). Пренебрегая потерями энергии на сопротивление воздуха, можно записать закон сохранения механической энергии для системы «пуля + маятник» после удара и найти высоту *h*, на которую поднялся центр масс системы:

$$h = u^2 / 2g. \qquad (3)$$

Так как по условию эксперимента $b << l$, то высота равна:

$$h = l - l' = l - \sqrt{l^2 - b^2} = l(1 - \sqrt{1 - b^2/l^2}) \cong b^2 / 2l. \qquad (4)$$

Из (1) – (3) получаем:

$$\upsilon = (bM / m)\sqrt{g / l}. \qquad (5)$$

Удар пули о маятник неупругий, так как значительная часть кинетической энергии летящей пули после соударения с маятником переходит во внутреннюю энергию системы (расходуется на неупругую деформацию маятника и пули и т.п.).

Экспериментальные задачи, поставленные в работе:

- изучение кинематического и динамического методов измерения больших скоростей;
- нахождение ошибок прямых и косвенных измерений.

Описание экспериментальной установки

Кинематический метод. На пути движения пули устанавливаются два бумажных диска, закрепленных на оси, параллельной направлению движения пули (см. рис. 3.1). Расстояние между дисками фиксировано. Диски приводятся во вращение электродвигателем. После выстрела электродвигатель выключается, бумажные диски снимаются и накладываются друг на друга на специальный столик с крепящим устройством, таким же, как и на оси электродвигателя. На верхнем диске проводятся линии, соединяющие центр диска с пробитыми пулей дырочками на первом и втором диске. Полученный угол φ измеряется транспортиром.

Динамический метод. На пути движения пули устанавливается массивный маятник, подвешенный на длинных нитях (см. рис. 3.2). Центральная часть маятника заполнена пластилином. Летящая пуля, врезаясь в маятник, застревает в пластилине, передавая маятнику свой импульс. Отклонение маятника *b* по горизонтали отсчитывается по шкале (на рис. 3.2 шкала не показана).

Подготовка протокола к работе

(*Выполняется во внеаудиторное время при подготовке к занятию*)

Запишите в лабораторной тетради номер и название работы.

Запишите в тетради заголовок: «***Задание 1. Определение скорости пули кинематическим методом***».

Запишите расчетные формулы с расшифровкой буквенных обозначений для вычисления скорости пули кинематическим методом и определения абсолютной и относительной ошибок этого измерения (см. ***Приложение*** и **В4** [4]).

Подготовьте табл. 1.

Табл. 1

d, м	n, об/мин	ω, $с^{-1}$	φ, рад	$\upsilon_к$, м/с	ε_{υ_k}, %	$\Delta\upsilon_к$, м/с

Запишите в тетради заголовок: «***Задание 2. Определение скорости пули динамическим методом***».

Запишите расчетные формулы с расшифровкой буквенных обозначений для вычисления скорости пули динамическим методом и определения абсолютной и относительной ошибок этого измерения (см. ***Приложение*** и **В4** [4]).

Подготовьте табл. 2.

Табл. 2

M, кг	l, м	m, кг	b, м	$\upsilon_д$, м/с	$\varepsilon_{\upsilon_д}$, %	$\Delta\upsilon_д$, м/с

Измерения и обработка результатов

Задания 1 и 2 выполняются параллельно, а их обработка проводится последовательно.

1. Приготовьте два бумажных диска, напишите на них номера 1 и 2 и закрепите их на оси двигателя так, чтобы обозначенные стороны были обращены к стволу ружья.

Запишите в тетрадь паспортные данные установки: частоту вращения двигателя n (об/мин), расстояние между дисками d, длину l и массу маятника M и ошибки их измерения. Взвесьте пулю, пересчитайте n в ω и запишите в тетрадь как результаты, так и ошибки измерения m и вычисления ω.

2. Закрепите бумажные диски на оси установки и зарядите ружье.

Указание. Ружье заряжайте и стреляйте из него только в присутствии преподавателя или инженера!

3. Включите двигатель, вращающий диски. Произведя выстрел, визуально зафиксируйте максимальное отклонение маятника b по шкале и запишите это

значение в тетрадь. Выключите двигатель. Снимите бумажные диски, совместите их так, чтобы измерить угол поворота одного диска относительно другого φ (см. рис. 3.1) и запишите это значение в тетрадь.

4. Рассчитайте скорость пули кинематическим методом. Данные измерений и вычислений внесите в табл. 1. Рассчитайте относительную ε_{υ_k} абсолютную $\Delta\upsilon_к$ ошибки косвенных измерений скорости пули кинематическим методом.

5. Рассчитайте скорость пули динамическим методом. Данные измерений и вычислений внесите в табл. 2. Рассчитайте относительную $\varepsilon_{\upsilon_д}$ и абсолютную $\Delta\upsilon_д$ косвенных измерений скорости пули динамическим методом.

Приложение

Используя порядок нахождения относительной ошибки косвенных измерений, рассмотренный в разделе **B4** [4], и формулы (1) и (5), можно получить сначала относительную ошибку косвенных измерений скорости

для кинематического метода: $\varepsilon_{\upsilon_k}^2 = \varepsilon_\omega^2 + \varepsilon_d^2 + \varepsilon_\varphi^2$,

где ε_ω, ε_d и ε_φ – относительные ошибки прямых измерений ω, d и φ, соответственно;

для динамического метода: $\varepsilon_{\upsilon_д}^2 = \varepsilon_b^2 + \varepsilon_M^2 + \varepsilon_m^2 + 0{,}25 \cdot \varepsilon_g^2 + 0{,}25 \cdot \varepsilon_l^2$,

где ε_b, ε_M, ε_m, ε_g и ε_l – относительные ошибки измерений b, M, m, g и l, соответственно,

а затем их соответствующие абсолютные ошибки как

$$\Delta\upsilon_к = \upsilon_к \cdot \varepsilon_{\upsilon_k} \qquad \text{и} \qquad \Delta\upsilon_д = \upsilon_д \cdot \varepsilon_{\upsilon_д}.$$

***Рекомендуемая литература*:**

1. Гершензон Е.М., Малов Н.Н., Мансуров А.Н. Курс общей физики. Механика» (2001), гл. 1, § 1.1 – 1.6, гл. II, § 2.1 – 2.9, гл. IV**,** § 4.5.

2. Иродов И.Е., Механика. Основные законы (11-е изд., 2013), гл. III, § 3.1. – 3.3, гл. IV, § 4.1.– 4.6.

3. Савельев И.В. Курс общей физики в 5 томах, т. 1, Механика (5-е изд., 2011), гл.1, §1.5, гл. 2, гл. 3, § 3.1 – 3.7, 3.10, 3.11.

4. Введение в физический практикум.

5. Сивухин Д.В. Общий курс физики в 5-ти томах, т. 1, Механика (4-е изд., 2005), § 26.

Примерные контрольные вопросы

1. Как можно объяснить расхождение в значениях скорости пули**,** полученных из данных кинематического и динамического методов?

2. Как рассчитать изменение внутренней энергии системы «маятник–пуля» при неупругом ударе?

3. Как изменятся результаты эксперимента, если пуля влетает в маятник под некоторым углом β к горизонту?

4. Чему равно натяжение нитей маятника до удара пули и непосредственно после удара?

5. Как направлено и чему равно ускорение материальной точки при ее движении по окружности с постоянной по величине скоростью? Является ли это движение равномерным или равноускоренным?

6. Можно ли считать равноускоренными движениями:

а) падение куска мела со стола?

б) падение листа с дерева на землю?

в) полет парашютиста до раскрытия парашюта?

г) полет парашютиста после раскрытия парашюта?

д) полет спутника по круговой орбите?

7. Какую скорость – среднюю или мгновенную – вы определяете с помощью установки лабораторной работы № 1.3 кинематическим методом и динамическим методом?

8. Как рассчитать, на какую максимальную высоту поднимется тело, брошенное вертикально вверх со скоростью υ_0? Через какое время оно вернется обратно?

9. Является ли система «пуля – маятник» замкнутой? Как рассчитать скорость маятника после попадания в него пули?

10. Сохраняется ли механическая энергия системы «пуля – маятник» при ударе пули о маятник?

11. Рассчитайте, какая доля кинетической энергии пули переходит во внутреннюю энергию пули и маятника при их соударении.

12. Сравните величины скорости пули $\upsilon_к$ и $\upsilon_д$ и укажите возможные причины расхождения результатов.

13. Выведите формулы для оценки погрешности определения скорости пули кинематическим и динамическим методами.

Лабораторная работа № 1.4[1)]

Сложение гармонических колебаний

Введение

В работе изучается траектория движения и зависимость координаты от времени материальной точки (тела), участвующей одновременно в нескольких колебательных движениях, совершающихся либо вдоль одной прямой, либо во взаимно перпендикулярных направлениях.

1. Сложение гармонических колебаний, совпадающих по частоте и направленных по одной прямой. В этом случае два гармонических колебания различаются амплитудой и начальной фазой:

$$x_1 = a_1\cos(\omega t) \qquad \text{и} \qquad x_2 = a_2\cos(\omega t+\varphi), \tag{1}$$

а закон движения точки имеет вид:

$$x = x_1 + x_2 = a_1\cos(\omega t) + a_2\cos(\omega t+\varphi) = a\cos(\omega t+\varphi_0), \tag{2}$$

где $a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos\varphi}$ и $tg\varphi_0 = \dfrac{a_2\sin\varphi}{a_1 + a_2\cos\varphi}$. (3)

2. Сложение взаимно перпендикулярных гармонических колебаний.

Траектория движения материальной точки, участвующей в двух колебаниях одинаковой частоты ($x = x_m\cos(\omega t)$, $y = y_m\cos(\omega t+\varphi)$), происходящих вдоль взаимно перпендикулярных координатных осей, описывается уравнением:

$$\frac{x^2}{x_m^2} + \frac{y^2}{y_m^2} - \frac{2xy}{x_m y_m}\cos\varphi = \sin^2\varphi. \tag{4}$$

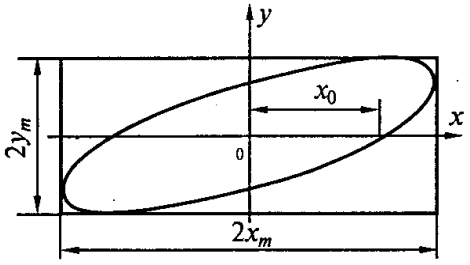

Рис. 4.1.

Материальная точка в этом случае движется по эллипсу, главные оси которого не совпадают с осями координат (рис. 4.1). Как видно из рисунка, траектория точки заключена внутри прямоугольника, стороны которого параллельны осям координат и равны соответственно $2x_m$ и $2y_m$, а центр совпадает с началом координат (положение равновесия колеблющейся точки); разность фаз слагаемых колебаний определяется формулой:

$$\sin\varphi = x_0/x_m, \tag{5}$$

где x_0 – значение координаты x при y=0.

Если отношение частот слагаемых колебаний равно целому числу (1, 2, …), то траектории движения являются замкнутыми линиями и носят название фигур Лиссажу. Вид этих фигур зависит от отношений ω_1/ω_2, x_m/y_m и начальной разности фаз φ колебаний, частный случай которых эллипс приведен на рис. 4.1.

Изучение траектории движения тела, участвующего одновременно в двух колебательных движениях, в работе проводится как на электрической модели,

[1)] Подготовлено преподавателями КОЭФ Александровым В.Н., Васильевой И.А. и Коротаевой Е.А.

при наблюдении движения следа электронного луча на экране осциллографа, так и на механической модели (движение песочного маятника).

Экспериментальные задачи, поставленные в работе:

- определение амплитуды и фазы колебательного движения тела, участвующего в двух колебаниях одного направления;
- изучение формы траектории материальной точки, участвующей в двух взаимно перпендикулярных колебаниях;
- определение разности фаз складываемых колебаний из вида траектории результирующего движения;
- вычисление абсолютной и относительной ошибок косвенных измерений.

Описание экспериментальных установок

1. В ***Задании 1*** для наблюдения траектории результирующего колебания при сложении двух взаимно перпендикулярных колебаний можно использовать механическую установку, основным элементом которой является песочный маятник.

Песочный маятник – массивное тело с воронкой для песка, подвешенное на двух нитях к раме (рис. 4.5). Приближенно такой маятник можно считать математическим, способным колебаться в направлении, перпендикулярном плоскости (рамы), в которой расположены нити подвеса в состоянии равновесия. Длина нитей этого «большого» маятника регулируется с помощью винта *К*.

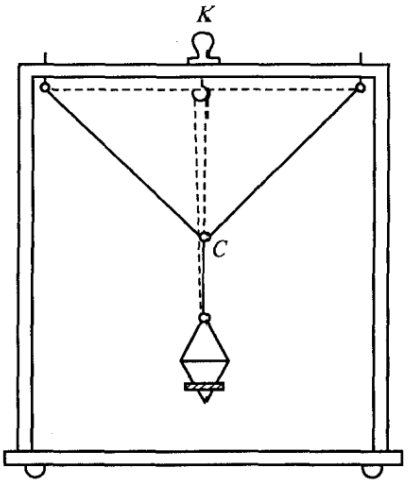

Рис. 4.2.

Для получения колебаний маятника в плоскости нитей (рамы) последние соединяются муфтой в точке *С*. Муфту можно перемещать по высоте, изменяя таким образом период колебаний второго («малого») маятника. В воронку маятника помещается песок, который через узкое отверстие в дне воронки может высыпаться на подложенную под маятник бумагу. Длина маятников измеряется линейкой и численно равна расстоянию по вертикали от горизонтальной линии, проходящей через точки подвеса соответствующих маятников до винтов крепления конуса воронки (заштрихованный прямоугольник на рис. 4.2).

Если сообщить маятникам колебания в двух взаимно перпендикулярных направлениях, то высыпающийся песок образует на листе бумаги след – кривую, соответствующую траектории движения маятника.

Изменяя соотношение периодов складываемых колебаний, можно наблюдать различные фигуры Лиссажу.

2. Экспериментальная установка ***Задания 2*** для наблюдения траектории результирующего колебания при сложении двух взаимно перпендикулярных колебаний состоит из осциллографа **С1-1** (рис. 4.3) и двух генераторов электрических гармонических колебаний **ГЗ-118** (рис. 4.4). Если два гармонических

электрических сигнала подать от двух генераторов на горизонтальный (X) и вертикальный (Y) входы осциллографа, то на экране трубки ((1) рис. 4.3) можно наблюдать фигуры Лиссажу, одна из которых приведена на рис. 4.1. Для их наблюдения выход одного генератора подключают кабелем к входу X осциллографа, а другого – к его входу Y. Изменяя частоту и амплитуду сигналов генераторов, на экране осциллографа наблюдают различные фигуры Лиссажу.

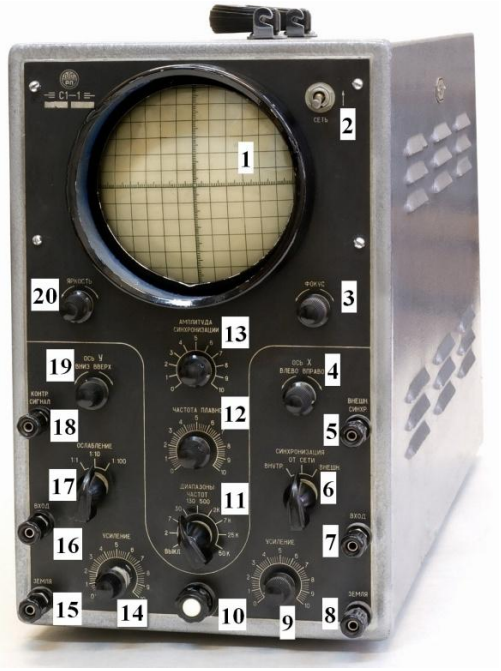

Рис. 4.3.

Рис. 4.4.

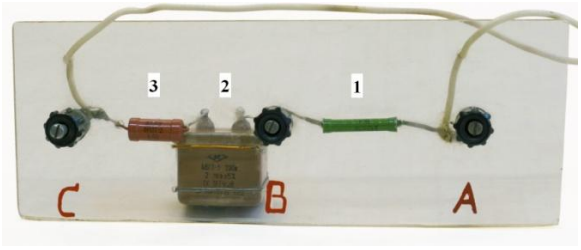

Рис. 4.5.

3. В экспериментальную установку ***Задания 3*** для изучения сложения гармонических колебаний одного направления входят осциллограф **С1-1** (рис. 4.3) и электрическая схема (рис. 4.5), состоящая из последовательно соединенных двух сопротивлений (1) и (3) и конденсатора (2).

Пониженное напряжение городской сети подается от источника (на рис. не приведен) на клеммы *AC* электрической цепи. Разности потенциалов между точками *AB, BC, AC* меняются по гармоническому закону:

$$U_{AB} = U_1\cos(\omega t);\ U_{BC} = U_2\cos(\omega t+\varphi_{12});$$

$$U_{AC} = U_{AB} + U_{BC} = U_1\cos(\omega t) + U_2\cos(\omega t+\varphi_{12}) = U_0\cos(\omega t+\varphi_{10}). \qquad (6)$$

Разность фаз φ возникает из-за наличия емкости на участке *BC*.

Если вертикальный вход осциллографа (вход Y: клеммы (15) и (16) на рис. 4.4) подключать попеременно к участкам цепи *AB, BC* и *AC*, то вертикальное смещение луча на экране осциллографа будет пропорционально соответственно разности потенциалов U_{AB}, U_{BC}, $U_{AC}= U_{AB}+U_{BC}$, и на экране будут наблюдаться соответствующие синусоиды. Благодаря специальной электронной схеме в осциллографе, называемой «блоком синхронизации развертки», на экране эти синусоиды будут неподвижными. Поэтому будет наблюдаться смещение синусоид по горизонтальной оси X, соответствующее сдвигу фаз между складываемыми колебаниями, который может быть рассчитан с учетом того, что за период сдвиг фаз составляет 2π радиан.

Работа электрической схемы на рис. 4.5 будет объяснена позднее в разделе «Электричество» курса физики. Настоящий опыт посвящен построению векторной диаграммы сложения двух гармонических колебаний одинаковых частот и одного направления на основе полученных экспериментальных результатов. На рис. 4.6 приведен пример такой векторной диаграммы.

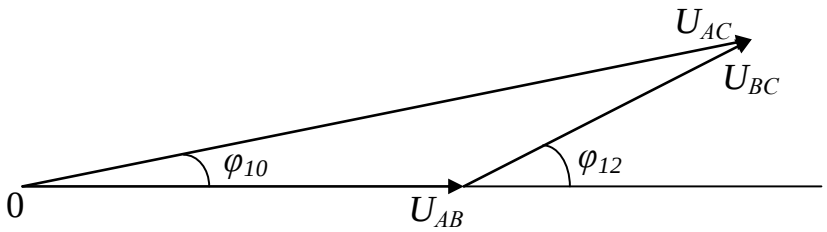

Рис. 4.6.

Подготовка протокола к работе

(*Выполняется во внеаудиторное время при подготовке к занятию*)

Запишите в лабораторной тетради номер и название работы.

Запишите в тетради заголовок «***Задания 1. Наблюдение траектории движения песочного маятника при колебаниях во взаимно перпендикулярных направлениях***».

Запишите в тетради формулы: описывающих движение точки при колебаниях во взаимно перпендикулярных направлениях, позволяющих определить угол φ и абсолютную и относительную ошибки косвенных измерений этого угла (см. **В4** [4] и ***Приложение*** к настоящей работе).

Подготовьте табл. 1, 2 и 3.

Табл. 1

Направление колебания	T, с	Амплитуда, м	$\sin\varphi$	Разность фаз φ, рад	$\Delta\varphi$, рад	ε_φ
x						
y						

Табл. 2

Колебания в плоскости рамы		Колебания в плоскости, перпендикулярной раме	
Длина маятника l_1, м	T_1, с	Длина маятника l_2, м	T_2, с

Табл. 3

№ измер.	Соотнош. длин	N (кол-во колеб.)	t, с	T, с
1. По оси X	1:1	10		По оси X: _____ с
2. По оси Y		10		По оси Y: _____ с
3. По оси X	1:4	10		По оси X: _____ с
4. По оси Y		10		По оси Y: _____ с

Оставьте полстраницы пустыми для черновых записей и вычислений.

Запишите в тетради название «***Задания 2. Сложение двух взаимно перпендикулярных колебаний с помощью осциллографа***».

Повторно ознакомьтесь с выполнением ***Задания 2 лабораторной работы 1.1.***

Подготовьте кальку для зарисовки осциллограмм, табл. 4 для зарисовки получаемых кривых для отношений частот слагаемых колебаний: 1:1, 1:2, 2:1, 1:3 и 2:3 и оставьте в тетради место для вспомогательных записей.

Табл. 4

№	Отношение частот	Картинка на экране осциллографа
1	1:1	
2	1:2	
…		

Запишите в тетради заголовок «***Задания 3. Сложение гармонических колебаний, одинаковых по частоте и направлению***» (Выполняется по указанию преподавателя).

Запишите формулы (6) с расшифровкой буквенных обозначений исследуемых колебаний и подготовьте кальку для зарисовки осциллограмм и табл. 5 в тетради для записи результатов измерений.

Табл. 5

U_1, мм	U_2, мм	φ_{12}, рад	$U_0^{\text{изм}}$, мм	$\varphi_{10}^{\text{изм}}$, рад	$U_0^{\text{рас}}$, мм	$\varphi_{10}^{\text{рас}}$, рад

Измерения и обработка результатов

Задание 1

Опыт 1. (*знакомство с работой экспериментальной установки*).

Поднимите муфту на нитях маятника и закрепите ее на крючке перекладины (при этом периоды слагаемых колебаний будут одинаковы) так, чтобы низ конуса воронки находился на высоте 2 – 3 см над столом. С помощью линейки измерьте длину маятника от точки подвеса до винтов крепления конуса воронки.

Положите на основание рамы лист бумаги, отметьте на нем проекцию неподвижного маятника и через эту точку проведите оси координат (в плоскости рамы (ось Y) и перпендикулярно к ней (ось X).

Отведите маятник (воронку) на ≈ 10 см от начала координат и, отпустив его, измерьте с помощью секундомера время его десяти колебаний t_{10} и вычислите

период колебаний маятника. Секундомер рекомендуется включать не ранее начала второго колебания. Запишите результаты этих измерений в тетради.

Опыт 2 («*песочный осциллограф*», *выполняется под наблюдением инженера*). Отведите маятник (с песком) в сторону в плоскости рамы и в начале второго периода начните равномерно двигать лист бумаги перпендикулярно плоскости рамы, чтобы получить песочный след нескольких периодов колебаний.

Обведите карандашом полученный след, выберете лучший записанный период, который получен при равномерном движении бумаги, и определите по нему амплитуду колебания (в см) и среднюю скорость движения бумаги и запишите их в тетради.

Опыт 3. Отведите маятник (с песком) в сторону в произвольном направлении, но не вдоль осей и отпустите, сообщив ему небольшой дополнительный импульс в направлении *x* или у.

Получите на листе бумаги траекторию (песочный след) результирующего движения за несколько периодов. Обведите карандашом полученную кривую, определите амплитуды, разность фаз и запишите уравнения слагаемых колебаний.

Данные измерений и вычислений T, x_m, y_m, φ, $\Delta\varphi$ и ε_φ занесите в табл. 1.

Опыт 4. Рассчитайте, при каком соотношении длин маятников отношение периодов их колебаний будет равно 2. Поместите муфту на нитях в положение, удовлетворяющее найденному условию. Проверьте правильность выбранного положения муфты непосредственным измерением периодов колебаний маятника в плоскости рамы T_1 и в направлении, перпендикулярном плоскости рам, T_2. Данные измерений и вычислений l_1, l_2, T_1, T_2 занесите в табл. 2.

Опыт 5. Отклонив маятник (с песком) в сторону, но не вдоль осей, приведите его в движение, сообщив первоначальный толчок в первом случае в направлении оси X, а во втором случае в направлении оси Y. Зарисуйте фигуры, образованные песком на листе бумаги за несколько периодов в табл. 3.

Все рисунки, полученные в процессе выполнения работы, сохраните в протоколе работы для защиты полученных результатов.

Задание 2

Включите два звуковых генератора и осциллограф. Отключите блок генератора развертки осциллографа, поставив переключатель (11) в положение «выкл», и в центре его экрана должна появиться светящаяся точка.

С помощью кабеля подайте на его вход X напряжение от звукового генератора *1* (разъем (7) на рис. 4.4) на частоте ≈200 Гц (частота регулируется ручками (3), (4), (5) и (11) на рис. 4.4). На экране осциллографа должна появиться горизонтальная линия. Ручками (9) генератора и осциллографа добейтесь того, чтобы длина этой линии составляла 6 – 7 см.

Временно отключите осциллограф от генератора *1* (отключив провод кабеля от клеммы (7) осциллографа) и другим кабелем подайте на его вход Y напряжение от звукового генератора *2* на частоте ≈200Гц. На экране осциллографа должна появиться вертикальная линия. Ручками (9) генератора и (14) и (17) осциллографа добейтесь того, чтобы длина этой линии составляла 4 – 6 см.

Подключите кабель от генератора *1* к входу X осциллографа. Плавно изменяя частоту выходного напряжения звукового генератора *2*, получите на экране осциллографа фигуры, соответствующие отношениям частот слагаемых колебаний: 1:1, 1:2, 2:1, 1:3 и 2:3. Зарисуйте наблюдаемые фигуры в табл. 4.

Задание 3 (Выполняется по указанию преподавателя)

Подсоедините провода электрической схемы (рис. 4.4) к клеммам источника пониженного напряжения городской сети (на рис.4.4 не показан).

Соедините вертикальный вход («Y») осциллографа (клеммы (15) и (16) на рис. 4.4) с участком цепи *AB* (точка *A* соединяется с клеммой «земля» осциллографа (15)).

Ручку «синхронизация» (6) поставьте в положении «от сети». Ручками «диапазоны частот» (11), «частота плавно» (12) и «амплитуда синхронизации» (13) установите на экране осциллографа устойчивую картину, соответствующую одному периоду колебаний (рис. 4.6).

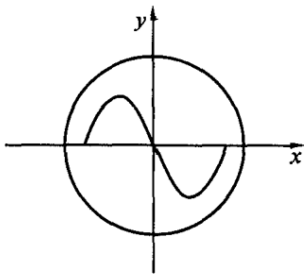

Рис. 4.6.

Подберите положение ручек «усиление» по входам X (9) и Y (14) таким образом, чтобы амплитуда смещения электронного луча на экране осциллографа не превышала 30 мм. При всех дальнейших измерениях положения всех ручек на панели должны оставаться неизменными.

Зарисуйте полученную кривую на кальке, отметив положение горизонтальной и вертикальной осей по координатной сетке экрана осциллографа. Измерьте амплитуду колебаний U_1 (в мм) и запишите ее в табл. 5.

Соедините далее вход Y осциллографа с участком цепи *BC* (клемму *B* соедините с клеммой «земля» (15) осциллографа). Зарисуйте на той же кальке вторую кривую, не смещая положения горизонтальной и вертикальной осей относительно координатной сетки осциллографа.

По смещению максимума второй кривой вдоль горизонтальной оси вычислите сдвиг фазы φ_{12} второго колебания относительно первого. Измерьте амплитуду колебания U_2 (в мм) и запишите ее численное значение, а также величину сдвига фазы φ_{12} в табл. 5. Постройте векторную диаграмму (см. рис. 4.5) и найдите амплитуду $U_0^{\text{рас}}$ и начальную фазу $\varphi_{10}^{\text{рас}}$ суммарного колебания.

Для проверки этого результата соедините вход Y осциллографа с участком цепи *AC* (клемму *A* соедините с клеммой «земля» (15)). Зарисуйте на кальке третью синусоиду.

Измерьте амплитуду этого суммарного колебания $U_0^{\text{изм}}$ (в мм) и вычислите сдвиг его фазы $\varphi_{10}^{\text{изм}}$ относительно первого колебания. Сравните полученные значения с рассчитанными по векторной диаграмме. Данные измерений и вычислений амплитуд и фаз колебаний внесите в табл. 5.

Отключите схему (рис. 4.4) от источника тока и осциллографа.

Приложение

Для нахождения угла φ в ***Задании 1*** Опыт 3 используются экспериментальные результаты, полученные в этом задании и подставленные в формулу (5). Так как $\varphi = \arcsin(x_0/x_m)$, то можно показать (см. **B4** [4]), что относительная и абсолютная ошибки определения φ равна, соответственно:

$$\varepsilon_\varphi^2 = \left(\frac{tg\,\varphi}{\varphi}\right)^2 \cdot \left(\varepsilon_{x_0}^2 + \varepsilon_{x_m}^2\right) \qquad \text{и} \qquad \Delta\varphi = \varphi \cdot \varepsilon_\varphi. \tag{7}$$

Здесь ε_{x_0} и ε_{x_m} – относительные ошибки измерения x_0 и x_m, соответственно.

***Рекомендуемая литература*:**

1. Гершензон Е.М., Малов Н.Н., Мансуров А.Н. Курс общей физики. Механика» (2001), гл. 1, § 1.8 – 1.10, гл. VIII, § 1.1 – 8.8.

2. Иродов И.Е., Механика. Основные законы (11-е изд., 2013), гл. VI, § 6.1.

3. Сивухин Д.В. Общий курс физики в 5-ти томах, т. 1, Механика (4-е изд., 2005), гл. VI, § 39.

4. Введение в физический практикум.

Примерные контрольные вопросы

1.Выведите формулы (2) и (3) при помощи метода векторных диаграмм.

2. Можно ли при выполнении ***Задания 3*** поставить ручку «синхронизация» на панели осциллографа в положение «внутр.»?

3. Выведите уравнение траектории движения материальной точки (4), совершающей колебания в двух взаимно перпендикулярных направлениях, если $\omega_1/\omega_2 = 1$ и разность фаз колебаний φ. Рассмотрите частные случаи $\varphi = 0$, $\varphi = \pi/2$.

4. По результатам выполнения ***Задания 1*** определите кинематические параметры движения воронки по эллиптической траектории: скорость, нормальное и тангенциальное ускорения, полное ускорение, радиус кривизны в различных точках траектории. Запишите уравнение траектории в параметрическом виде.

5. Как по виду фигур Лиссажу определить соотношение частот слагаемых колебаний?

6. Выведите уравнение траектории движения материальной точки (4), совершающей колебания в двух взаимно перпендикулярных направлениях, если $\omega_1/\omega_2 = 2$ и разность фаз колебаний φ. Рассмотрите частные случаи $\varphi = 0$, $\varphi = \pi/2$.

7. Вычислите абсолютную и относительную ошибки косвенных измерений φ (см. B4 в [4] и пример в работе 1.1) в ***Задании 1***.

Лабораторная работа № 1.5[1)]

Измерение момента инерции велосипедного колеса

Введение

В работе момент инерции тела (велосипедного колеса) определяется двумя методами: методом вращения и методом колебаний.

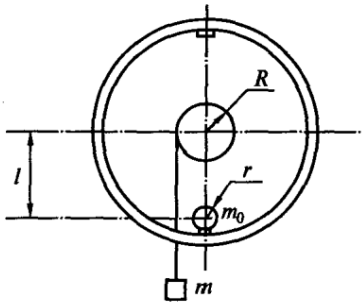

Рис. 5.1.

В первом случае центр масс тела лежит на оси вращения. Колесо приводится во вращение силой натяжения нити, к свободному концу которой подвешен груз m (рис. 5.1). Из уравнения динамики вращательного движения тела относительно неподвижной оси Z следует, что $I_{к} \cdot \varepsilon_{уг} = M_z$, и можно вычислить момент инерции колеса $I_в$, если известны угловое ускорение $\varepsilon_{уг}$ и момент силы натяжения нити M_z. Эти величины можно определить, измерив путь h, пройденный грузом m, и время t:

$$I_{к} = \frac{M_z}{\varepsilon_{уг}} = mR^2\left(\frac{gt^2}{2h} - 1\right), \qquad (1)$$

где $\varepsilon_{уг} = 2h/Rt^2$.

Формула (1) выведена без учета сил трения. В работе предлагается учесть возникающие при вращении колеса силы трения. Для этого необходимо измерить максимальную массу подвешенного на нити груза $\Delta m_{тр}$, при которой колесо еще не вращается. Так как в условиях равновесия $\Delta m_{тр} \cdot g \cdot R = M_{тр}$, то расчетная формула с учетом сил трения на оси колеса принимает вид:

$$I_{к} = (m - \Delta m_{тр})R^2\left(\frac{gt^2}{2h} - \frac{m}{m - \Delta m_{тр}}\right). \qquad (2)$$

Во втором случае положение центра масс тела необходимо сместить ниже оси вращения. На внутренней стороне обода колеса симметрично по диаметру имеются два одинаковых небольших гнезда. Помещая в одно из них металлический шарик массой $m_{ш}$, мы получаем физический маятник, способный колебаться вокруг оси колеса. В этом случае колесо представляет собой физический маятник.

Физическим маятником называется твердое тело, которое может качаться вокруг неподвижной горизонтальной оси. В этом случае положение тела в каждый момент времени можно характеризовать углом его отклонения α от положения равновесия (вертикали – см. рис. 5.1). Тогда уравнение динамики вращательного движения твердого тела можно записать следующим образом:

$$M = I_{с}\ddot{\alpha} = -m_{ш} g l \sin\alpha \approx -m_{ш}\, g l \alpha. \qquad (3)$$

[1)] Подготовлено преподавателями КОЭФ Александровым В.Н. Васильевой И.А. и Коротаевой Е.А.

где I_c - момент инерции системы «колесо + шарик» относительно оси колеса, l - расстояние между точкой подвеса и точкой приложения возвращающей силы. Момент возвращающей силы создается силой тяжести шарика, а точка приложения возвращающей силы совпадает с центром масс шарика. Здесь знак минус обусловлен тем, что момент M препятствует увеличению угла α.

Это выражение можно переписать в виде:

$$I_{\text{с}}\ddot{\alpha} + m_{\text{ш}}gl\alpha = 0 \qquad \text{или} \qquad \ddot{\alpha} + \frac{m_{\text{ш}}gl\alpha}{I_{\text{с}}} = 0.$$

Введя обозначение: $\omega_0 = \sqrt{\frac{m_{\text{ш}}gl}{I_{\text{с}}}}$, получим уравнение:

$$\alpha + \omega_0^2\alpha = 0.$$

Решение этого уравнения известно из кинематики колебательного движения:

$$\alpha = \alpha_0 \cdot cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Отсюда следует, что при малых амплитудах колебания физический маятник совершает гармонические колебания с циклической частотой ω_0 и периодом:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I_c}{m_{\text{ш}}gl}} \qquad (4)$$

В этом случае момент инерции маятника I_c складывается из момента инерции самого колеса $I_{\text{к}}$ и момента инерции шарика $I_{\text{ш}}$ относительно оси, проходящей через ось вращения колеса. Используя теорему Штейнера легко показать, что:

$$I_{\text{ш}} = 0{,}4m_{\text{ш}}r^2 + m_{\text{ш}}l^2, \qquad (5)$$

где r – радиус шарика и l – расстояние от центра масс шарика до оси вращения.

Выражение (4) в этом случае преобразуется к виду:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\text{ш}} + I_{\text{к}}}{m_{\text{ш}}gl}}, \qquad (6)$$

откуда

$$I_{\text{к}} = \frac{T^2}{4\pi^2}m_{\text{ш}}gl - I_{\text{ш}}\ . \qquad (7)$$

Экспериментальные задачи, поставленные в работе:

- экспериментальное определение момента инерции велосипедного колеса методами вращения и колебаний;
- вычисление абсолютной и относительной ошибок косвенных измерений.

Описание экспериментальной установки

Экспериментальная установка представляет собой велосипедное колесо, способное вращаться вокруг горизонтальной оси (см. рис. 5.1). На шкив колеса намотана нить. К свободному концу нити прикреплена чашечка, в которую вкладывают различные грузы. Измерения времени движения груза производятся с помощью секундомера. Расстояние h, которое проходит груз m определяется линейкой.

Для определения момента инерции колеса методом колебаний следует убрать контейнер для грузов, закрепить нить на шкиве и поместить металлический шарик массой $m_ш$ в одно из двух симметричных гнезд. Мы получаем физический маятник, способный колебаться вокруг оси колеса с периодом T (см (6)).

Для определения $I_с$ измеряются период колебания маятника T (с помощью секундомера), масса шарика $m_ш$ (на электронных весах), радиус шарика r (штангенциркулем) и расстояние l (линейкой).

Подготовка протокола к работе

(*Выполняется во внеаудиторное время при подготовке к занятию*)

Запишите в лабораторной тетради номер и название работы.

Запишите в тетради заголовок «***Задание 1. Определение момента инерции колеса методом вращения***».

Запишите в тетради формулы, позволяющие на основе метода вращения определить момент инерции колеса, с расшифровкой всех буквенных обозначений, абсолютные ошибки прямых измерений ΔR, Δm_Σ, Δh, Δt и формулы для вычисления абсолютной и относительной ошибок косвенных измерений $I_к$ этим методом (см. примеры в **В4** [4] и ***Приложение*** в настоящей работе) и подготовьте табл. 1.

Табл. 1

№	R, м	m_Σ, кг	h, м	t_i, с	$I_к$, кг·м^2	$\overline{I_к}$, кг·м^2	ε_I, %	$\Delta I_к$, кг·м^2
1								
2								
3								

ΔR, м	Δm_Σ, кг	Δh, м	Δt, с	Δg, м/с$^{-2}$	ε_R, %	ε_m, %	ε_h, %	ε_t, %	ε_g, %

Оставьте половину страницы свободной для черновых записей и вычислений.

Запишите в тетради заголовок «***Задание 2. Определение момента инерции колеса методом колебаний***».

Запишите в тетради формулы, позволяющие на основе метода колебаний определить момент инерции колеса, с расшифровкой всех буквенных обозначений, абсолютные ошибки прямых измерений $\Delta m_ш$, $\Delta r_ш$, Δl, Δt и формулы для вычисления абсолютной и относительной ошибок косвенных измерений $I_к$ этим методом (см. примеры в **В4** [4] и ***Приложение*** в настоящей работе) и подготовьте табл. 2.

Табл. 2

$m_ш$, кг	$r_ш$, м	l, м	t, с	T, с	$I_с$, кг·м^2	$I_ш$, кг·м^2	$I_к$, кг·м^2	ε_I, %	$\Delta I_к$, кг·м^2

$\Delta m_ш$, г	$\Delta r_ш$, мм	Δl, м	ΔT, с	Δg, м·с$^{-2}$	$\varepsilon_{m_ш}$, %	ε_r, %	ε_l, %	ε_T, %	ε_g, %

Измерения и обработка результатов

Задание 1

Под руководством инженера измерьте величину перегрузка $\Delta m_{тр}$, определяющего величину $M_{тр}$ момента силы трения и запишите это значение в тетрадь.

Измерьте штангенциркулем диаметр шкива в разных местах (не менее трех раз) и найдите среднее значение радиуса шкива R. Взвесьте грузы (не менее двух: m_1 и m_2) и контейнер для грузов ($m_{кон}$) и прикрепите последний к концу нити. Результаты этих прямых измерений и их абсолютные и относительные ошибки занесите в табл. 1.

Для первого измерения вращением колеса поднимите контейнер с грузом суммарной массой $m=m_Σ=m_1+m_{кон}$ на заранее отмеренную высоту от пола (h = 1 ÷1,5 м) и, отпустив колесо, измерьте время движения груза t (с помощью секундомера) не менее трех раз и вычислите среднее время t_i. Измерения повторите, изменив массу $m_Σ$ на $m_2+m_{кон}$ и $m_1+m_2+m_{кон}$. Данные измерений t_i, h, $m_Σ$, $\Delta m_Σ$, R и вычисления $\overline{I_к}$ и относительной ошибки ε_I (см. примеры в **В4** [4] и ***Приложение*** в настоящей работе) для первого измерения $I_к$ внесите в табл. 1.

Оцените влияние силы трения. Сравните момент силы трения и момент силы натяжения нити. Сделайте вывод. Вычислите момент инерции колеса с учетом сил трения (формула (2)) для первого измерения и сравните его с результатом, полученным по формуле (1).

Задание 2

Снимите груз m с нити. Закрепите нить на шкиве. Возьмите металлический шарик, определите с помощью весов его массу $m_ш$ и с помощью штангенциркуля его радиус $r_ш$. Положите шарик в одно из гнезд велосипедного колеса и определите с помощью линейки расстояние l от центра шарика до оси колеса. Результаты этих прямых измерений и их абсолютные и относительные ошибки занесите в табл. 2.

Выведите систему «велосипедное колесо и шарик» из положения равновесия, повернув на небольшой угол, и измерьте секундомером время 20 полных колебаний t. Определив период колебаний физического маятника T, рассчитайте момент инерции велосипедного колеса $I_к$.

Данные вычислений T, $I_с$, $I_ш$, $I_к$ и относительной ошибки ε_I (см. примеры в**B4** [4] и ***Приложение*** в настоящей работе) внесите в табл. 2.

Сравните значения $I_к$, полученные двумя методами. Сравните относительные ошибки определения $I_к$ методом колебаний и методом вращения. Объясните полученные результаты.

Приложение

Метод вращения

Момент инерции колеса методом вращения на основе проводимых прямых измерений вычисляется по формуле (1), то есть косвенным измерением. Для вычисления относительной ошибки косвенного измерения $I_к$ воспользуемся соотношением (1). Используя примеры в **B4** [4] и приняв $g = 9{,}8$ м/с^2, можно получить, что относительная и абсолютная ошибки в определении $I_к$ равны, соответственно:

$$\varepsilon_I^2 = \varepsilon_m^2 + 4\varepsilon_R^2 + \varepsilon_g^2 + 4\varepsilon_t^2 + \varepsilon_h^2 \qquad \text{и} \qquad \Delta I_к = \varepsilon_I \cdot I_к, \tag{8}$$

где ε_i – относительные ошибки соответствующих прямых измерений.

Метод колебаний

Момент инерции колеса методом колебания на основе проводимых прямых измерений вычисляется по формуле (7), то есть косвенным измерением. Так как $I_к \gg I_ш$, то для вычисления относительной ошибки косвенного измерения $I_к$ упростим (7), отбросив из него $I_ш$. Тогда, используя примеры в **B4** [4] и приняв $g = 9{,}8$ м/с^2 и $\pi = 3{,}14$, можно получить, что относительная и абсолютная ошибки в определении $I_к$ равны, соответственно:

$$\varepsilon_I^2 = 4\varepsilon_T^2 + 4\varepsilon_\pi^2 + \varepsilon_m^2 + \varepsilon_g^2 + \varepsilon_l^2 \qquad \text{и} \qquad \Delta I_к = \varepsilon_I \cdot I_к, \tag{9}$$

где ε_i – относительные ошибки соответствующих прямых измерений.

***<u>Рекомендуемая литература</u>*:**

1. Гершензон Е.М., Малов Н.Н., Мансуров А.Н. Курс общей физики. Механика (2001), гл. 5, § 5.1 – 5.4, гл. X, § 10.1.

2. Савельев И.В. Курс общей физики в 5 томах, т. 1, Механика (5-е изд., 2011), гл.5, §5.1–5.4, гл. 8, § 8.1 – 8.5.

3. Сивухин Д.В. Общий курс физики в 5-ти томах, т. 1, Механика (4-е изд., 2005), гл. V, § 30–36, гл. VI §39, 41.

4. Введение в физический практикум.

Примерные контрольные вопросы

1. Дайте определения момента силы, момента импульса и момента инерции твердого тела относительно неподвижной оси.

2. Сформулируйте основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела.

3. Выведите формулы для расчета момента инерции велосипедного колеса методом вращения (1) и (2).

4. Выведите формулу для расчета момента инерции велосипедного колеса методом колебаний (7) Почему в установке сделаны два симметричных гнезда для шарика?

5. От чего зависит момент инерции твердого тела. Приведите примеры расчета моментов инерции простейших тел: кольца, диска, шара и палочки.

6. При каких условиях можно считать колебания системы «велосипедное колесо + шарик» гармоническими.

7. Выведите формулы для оценки относительной и абсолютной погрешностей определения $I_к$ методом вращения и методом колебания.

8. С какой точностью необходимо взять из таблицы значения π и g при определении $I_к$ методом колебаний и методом вращения?

9. Какой из двух используемых методов (вращения или колебания) дает меньшую погрешность при определении $I_к$?

10. Случайная или систематическая ошибка определяет точности измерения $I_к$ в выполненных вами экспериментах?

11. Найдите скорость груза и угловую скорость вращения колеса через время t после начала движения. Получите ответ, исходя из законов динамики и исходя из закона сохранения энергии.

12. Как влияет сила трения на оси колеса на результаты измерения? Нужно ли ее учитывать в данном методе измерения?

13. В каком из двух используемых методов определения $I_к$ можно найти момент силы трения на оси колеса?

Лабораторная работа № 1.6[1)]

Изучение вращательного движения твердого тела

Введение

Вращательное движение твердого тела относительно неподвижной оси описывается уравнением:

$$I_z \cdot \varepsilon_{уг} = M_z, \qquad (1)$$

где I_z - момент инерции твердого тела относительно неподвижной оси Z, M_z - проекция момента внешних сил на ту же ось, $\varepsilon_{уг}$ - угловое ускорение.

В дальнейшем индекс «z» можно опустить, так как и момент инерции и момент сил рассматриваются относительно оси вращения прибора.

Экспериментальную проверку уравнения (1) можно провести, исследуя зависимость $\varepsilon_{уг}(M)$ при постоянном I или зависимость $\varepsilon_{уг}(I)$ при постоянном M.

Если цилиндр радиуса R вращается под действием силы натяжения намотанной на него нити с грузом, опускающимся в поле тяжести, то значение M можно вычислить, измерив высоты h, пройденные грузом m, и время движения t как:

$$M = m\,(g - a\,)\,R; \quad \text{где} \quad a = 2h/t^2 = \varepsilon_{уг}\,R, \quad \text{откуда}$$

$$M = m\left(g - (2h/t^2)\right) \cdot R \quad \text{и} \quad \varepsilon_{уг} = 2h/Rt^2 \qquad (2)$$

Опытная проверка основного уравнения динамики вращательного движения твердого тела может быть выполнена на приборе Обербека.

Соотношения (2) получены без учета сил трения в оси прибора. При учете этой силы (см. ***работу 1.5***) можно получить:

$$M = \left(m - \Delta m_{тр}\right)\left(g - \frac{2h}{t^2} \cdot \frac{m}{m - \Delta m_{тр}}\right), \qquad (2a)$$

где $\Delta m_{тр}$ - масса груза, при котором начинается движение системы.

Экспериментальные задачи, поставленные в работе:

- экспериментальное изучение вращательного движения твердого тела с помощью прибора Обербека;
- вычисление абсолютной и относительной ошибок косвенных измерений.

Описание экспериментальной установки

Прибор Обербека (рис. 6.1) представляет собой крестовину, укрепленную на двойном шкиве. Ось шкива установлена горизонтально и закреплена в подшипниках. Крестовина вращается под действием силы натяжения нити, намотанной на шкив. Изменение момента силы натяжения производится либо с помощью грузов различной массы m, прикрепляемых к свободному концу нити, либо изменением радиуса шкива, на который наматывается нить. Изменение

[1)] Подготовлено преподавателями КОЭФ Александровым В.Н. Васильевой И.А. и Коротаевой Е.А.

момента инерции прибора достигается передвижением четырех малых тел одинаковой массы m_0 по направляющим крестовины на расстояние l от оси прибора.

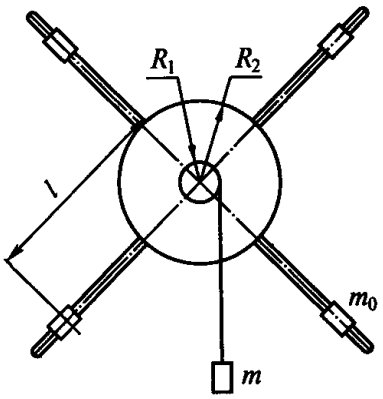

Рис. 6.1.

Экспериментальную проверку уравнения (1) можно провести двумя способами:

1. При неизменном моменте инерции должно сохраняться соотношение:

$$I = \frac{M_1}{\varepsilon_{\text{уг},1}} = \frac{M_2}{\varepsilon_{\text{уг},2}} = \cdots \qquad (3)$$

2. При постоянной массе груза, подвешенного к нити и неизменном радиусе шкива, должно выполняться соотношение:

$$I_2 - I_1 = 4m_0 \cdot (l_2^2 - l_1^2) \qquad (4)$$

где m_0 – масса каждого из цилиндров на крестовине l_1 и l_2 – расстояния от центров цилиндров до оси вращения в первом и втором случаях, соответственно. Расстояние h, которое проходит груз m во всех опытах одно и то же.

Используя свойство аддитивности момента инерции тела, можно получить выражение момента инерции прибора в виде:

$$I = I_0 + 4I_{\text{цил}}, \qquad (5)$$

где I_0 – момент инерции прибора без грузиков - цилиндров, $I_{\text{цил}}$ – момент инерции грузика - цилиндра, рассчитываемый по теореме Штейнера: $I_{\text{цил}} = I_{0,\text{цил}} + m_0 l^2$, где $I_{0,\text{цил}}$ – момент инерции грузика - цилиндра относительно оси, проходящей через его центр масс и параллельной оси вращения прибора Z.

Подготовка протокола к работе

(*Выполняется во внеаудиторное время при подготовке к занятию*)

Запишите в лабораторной тетради номер и название работы.

Запишите в тетради заголовок: «***Задание 1. Исследование зависимости углового ускорения тела от момента силы при постоянном моменте инерции тела***».

Запишите расчетные формулы с расшифровкой буквенных обозначений для определения углового ускорения $\varepsilon_{\text{уг}}$, момента силы M, момента инерции I и абсолютной и относительной ошибок косвенных измерений I – ε_I (см. (3), примеры в **В4** [3] и ***Приложение*** в настоящей работе).

Ознакомьтесь с пунктом «***Построение графика***» в ***работе № 1.2***, подготовьте лист миллиметровки для построения графика и оформите в тетради табл. 1.

Табл. 1

№ изме-рения	R_1 =___ м, h =__ м.					R_2 =___ м, h =___ м.				
	m_Σ, кг	t_i, с	$t_{ср}$, с	M, Н м	ε_{I_1}, с$^{-2}$	m_Σ, кг	t_i, с	$t_{ср}$, с	M, Н м	ε_{I_2}, с$^{-2}$
1										
2										
3										
I_1 =_____ кг м^2, ε_{I_1}=_____%.						I_2 =_____ кг м^2, ε_{I_2}=_____%.				

Оставьте свободным лист в тетради для вспомогательных записей и вычислений.

Запишите в тетради заголовок: «***Задание 2***. ***Исследование зависимости момента инерции тела I от распределения его массы относительно оси вращения***».

Запишите расчетные формулы с расшифровкой буквенных обозначений для определения углового ускорения $\varepsilon_{уг}$, момента силы M, момента инерции I и определения абсолютной и относительной ошибок косвенных измерений $I - \varepsilon_I$ (см. примеры в **В4** [3] и ***Приложение*** в настоящей работе).

Подготовьте табл. 2.

Табл. 2.

Постоянные величины: R =____ м, h =____ м, m_Σ = _____ кг, m_0 =___ кг.				
l_1=_____ м	$t_{1ср}$=____ с	I_1=____ кг м^2	ε_{I_1}=___ %	$\Delta I_{эксп}$=_____ кг м^2
l_2=_____ м	$t_{2ср}$=____ с	I_2=____ кг м^2	ε_{I_2}=___ %	$\Delta I_{теор}$=_____ кг м^2

Измерения и обработка результатов

Задание 1

В этом задании грузики-цилиндры с крестовины необходимо снять. Измерьте штангенциркулем радиусы шкивов R_1 и R_2 (не менее трех раз в разных местах

каждого шкива), линейкой выбранную высоту h от пола (около 1 м), на весах массы грузиков-цилиндров (m_0), двух грузов(m_1 и m_2) и контейнера для грузов ($m_{кон}$). Запишите в тетради результаты этих прямых измерений и их абсолютные и относительные ошибки.

Под руководством инженера измерьте величину перегрузка $\Delta m_{тр}$, определяющего величину $M_{тр}$ момента силы трения и запишите это значение в тетрадь.

Проведите оценку момента сил трения, используя формулы (2) и (2а). Сделайте вывод о том, нужно ли учитывать момент силы трения в данной лабораторной работе.

Прикрепите к концу нити контейнер для грузов. Проведите измерения времени движения грузов t для трех значений массы грузов ($m=m_\Sigma=m_1+m_{кон}$; $m_2+m_{кон}$; $m_1+m_2+m_{кон}$), подвешиваемых к нити, намотанной сначала на шкив радиуса R_1, а затем радиуса R_2. Измерения времени t проводятся с помощью секундомера от момента начала движения груза до момента удара его о пол не менее трех раз для каждого значения массы контейнера с грузом и радиуса шкива - t_i, затем вычисляются их средние значения $t_{ср}$. Каждый результат измерений и вычислений запишите в табл. 1.

Рассчитайте значения $\varepsilon_{уг}$ и M, постройте график зависимости $\varepsilon_{уг}(M)$ и определите из графика значение I, учитывая соотношение (3). Оцените приборную, случайную и относительную ошибки косвенных измерений I_1 и I_2 по формулам (2) и (3), например, для третьего измерения (см. примеры в **В4** [3] и ***Приложение*** в настоящей работе) и внесите в табл. 1.

Задание 2

Установите тела массой m_0 на расстояние l_1, близкое к длине крестовины и измерьте его линейкой, убедившись, прибор сбалансирован (грузы расположены симметрично). Затем выберете значения m_Σ, R и h, запишите их в тетради и при этих условиях проведите не менее трех измерений времен движения грузов t. Запишите эти значения времен в тетради и вычислите среднее время движения $t_{1ср}$, которое будете использовать в расчетах. Повторите измерения для l_2, равного примерно одной трети l_1.

Используя формулы (2) и (3) и экспериментальные данные, рассчитайте значения моментов инерции прибора I_1 и I_2, соответствующих положениям тел массой m_0 на расстояниях l_1 и l_2. Сравните разность этих значений $\Delta I_{эксп}= I_1 - I_2$ с теоретическим значением (5) $\Delta I_{теор}=4m_0(l_1-l_2)$. Вычислите относительные ошибки косвенных измерений I_1 и I_2 (ε_{I_1} и ε_{I_2}, соответственно) и запишите их в табл. 2.

Значения h, R, $t_{1ср}$, $t_{2ср}$, l_1, l_2, m_0, m_Σ, I_1, I_2, $\Delta I_{эксп}$ и $\Delta I_{теор}$ внесите в табл. 2.

Приложение

В работе момент инерции крестовины I вычисляется по формуле (3), используя (2) и результаты измерений. Так как ускорение $a \ll g$, то для

вычисления ошибки измерения I из (2) и (3) можно получить упрощенное соотношение:

$$I = \frac{mgR^2t^2}{2h}. \qquad (6)$$

Тогда, используя (6) и примеры в **В4** [3] и приняв $g = 9{,}8$ м/с^2, получим, что относительная и абсолютная ошибки в определении I равны, соответственно:

$$\varepsilon_I^2 = \varepsilon_m^2 + 4\varepsilon_R^2 + \varepsilon_g^2 + 4\varepsilon_t^2 + \varepsilon_h^2 \qquad \text{и} \qquad \Delta I_{\text{к}} = \varepsilon_I \cdot I, \qquad (7)$$

где ε_i – относительные ошибки соответствующих прямых измерений.

Рекомендуемая литература:

1. Гершензон Е.М., Малов Н.Н., Мансуров А.Н. Курс общей физики. Механика» (2001), гл. 5.

2. Сивухин Д.В. Общий курс физики в 5-ти томах, т. 1, Механика (4-е изд., 2005), гл. V, § 30 – 36, гл. VII §44 - 48.

3. Введение в лабораторный практикум.

Примерные контрольные вопросы

1. Выведите выражения (1) – (5).

2. Почему при выполнении эксперимента грузы на крестовине должны располагаться симметрично относительно оси вращения?

3 Случайной или систематической ошибкой определяется точность измерения I в эксперименте?

4. С какой точностью необходимо брать значения g из таблиц при расчете I?

5. Получите формулу момента инерции крестовины с грузами.

6. Найдите скорость груза и угловую скорость вращения крестовины через время t после начала движения. Получите ответ, исходя из уравнения динамики и исходя из закона сохранения энергии.

7. Куда направлены векторы угловой скорости и углового ускорения при вращении прибора Обербека под действием спускающего груза?

8. Как рассчитать ускорение грузов машины Атвуда, если ее блок считать диском массы $m_{\text{д}}$ и радиусом r?

9. Как рассчитать силу натяжения нити, к которой подвешен груз m в приборе Обербека, при ускоренном движении груза?

10. Докажите, что линейное ускорение a груза m и угловое ускорение ε крестовины прибора Обербека связаны соотношением $a = \varepsilon r$.

11. Как экспериментально определить момент инерции цилиндров m_0 в приборе Обербека?

12. При каких допущениях вами получены соотношения для $\Delta I_{эксп}$ и $\Delta I_{теор}$?

13. Вычислите моменты инерции простейших тел: кольца, диска, шара и палочки.

Лабораторная работа № 1.8[1)]

Изучение кинематики и динамики качения шара

Введение

Движение центра твердого тела в поле постоянной силы является равноускоренным. В общем случае, когда телу была сообщена начальная скорость под некоторым углом к ускорению, траектория равноускоренного движения представляет собой параболу. Если перпендикулярная к ускорению составляющая начальной скорости равна нулю, то парабола вырождается в прямую линию.

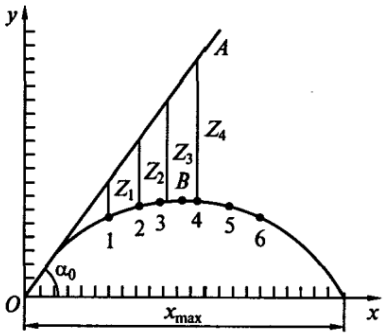

Рис. 8.1

Рассмотрим движение тела в декартовых координатах X и Y на плоскости. Пусть составляющие начальной скорости υ_{0x}, $\upsilon_{0y}>0$, а ускорение $a=a_y<0$. Траектория, которую описывает в пространстве центр масс в этом случае, является параболой, линия симметрии которой параллельна оси Y (рис. 8.1).

Координаты центра масс тела изменяются по закону:

$$y = y_0 + \upsilon_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}, \qquad x = x_0 + \upsilon_{0x}t, \tag{1}$$

где x_0, y_0 - координаты начальной точки (смотри задачу 2.2 в [5]) .

Прямая OA на рис. 8.1 соответствует траектории движения центра масс тела в отсутствие постоянной силы ($a_y=0$). Отрезки Z_i определяются разностью:

$$(y_0 + \upsilon_{0y}\cdot t) - y \qquad \text{и равны} \qquad a_y\cdot t^2/2. \tag{2}$$

Поэтому график $z(t^2)$ есть прямая линия (см. **В7** в [4]), из наклона которой к оси абсцисс можно вычислить ускорение a_y.

Мгновенный радиус кривизны траектории $R_{кр}$ определяется мгновенными значениями нормального ускорения a_n и мгновенной скорости υ тела в этой точке траектории (смотри задачу 2.25 в [5]) :

$$R_{кр} = \upsilon^2/a_n. \tag{3}$$

Движение твердого тела в поле постоянной силы можно осуществить, заставляя шарик катиться по наклонной плоскости (рис. 8.2). При этом вдоль плоскости действует сила

$$F_y = mg\sin\varphi, \tag{4}$$

приложенная к центру масс (φ - угол наклона плоскости к горизонту), и сила трения сцепления $F_т$, приложенная в точке соприкосновения шарика с плоскостью. Если шарик катится *без скольжения*, то соблюдаются следующие соотношения:

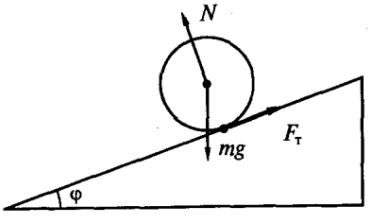

Рис. 8.2.

$$a_y = \alpha\cdot r = g\sin\varphi \qquad \text{и} \qquad I_1\cdot\alpha = mgr\sin\varphi, \tag{5}$$

[1)] Подготовлено преподавателями КОЭФ Александровым В.Н., Васильевой И.А. и Коротаевой Е.А.

где a_y - ускорение поступательного движения центра масс шарика; r - радиус шарика; α - угловое ускорение вращательного движения; I_1 - момент инерции шарика относительно мгновенной оси вращения, проходящей горизонтально через точку касания шарика с наклонной плоскостью.

Из второго уравнения, при известных значениях ускорения поступательного движения центра масс шарика a_y, его массы и радиусе, можно определить его момент инерции относительно мгновенной оси вращения:

$$I_1 = mr^2 g \sin\varphi / a_y. \qquad (6)$$

Экспериментальные задачи, поставленные в работе:

- экспериментальное определение кинематических характеристик (траектории и ускорения) движения центра масс шарика при его качении по наклонной плоскости в поле тяжести;
- экспериментальное определение момента инерции металлического шарика по определенному ранее значению ускорения a_y при его качении по наклонной плоскости в поле тяжести и сравнение с его теоретическим значением;
- определение абсолютной и относительной ошибок косвенных измерений.

Описание экспериментальной установки

Экспериментальная установка (рис. 8.3) позволяет получить траекторию движения металлического шарика по наклонной плоскости, а также измерить промежутки времени, в течение которого шарик передвигается от начальной к произвольно выбранной точке траектории.

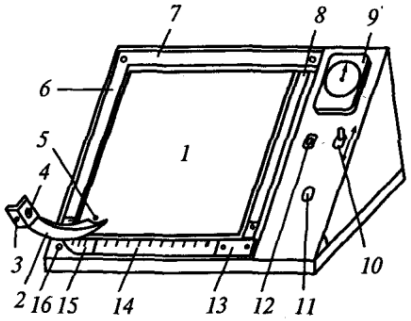

Рис. 8.3.

Рабочая поверхность установки *1* ограничена планками *6, 7, 8, 14.* Миллиметровая бумага помещается на рабочей поверхности установки и прижимается откидной планкой *6*. Подвижную планку *8* можно передвигать вдоль рабочей поверхности установки и фиксировать в нужном положении стопором *13*. Металлический желоб *2* имеет в верхней части держатель *3*, на котором устанавливается шарик. С помощью зажимов *4* держатель можно передвигать по желобу, устанавливая шарик на нужной высоте. Желоб можно вращать вокруг оси, перпендикулярной рабочей поверхности. Нужное положение желоба фиксируется стопором *16.* Транспортир *15* служит для ориентировочного определения направления начальной скорости шарика – угла β.

Питание установки осуществляется от городской электрической сети с напряжением 220 В. При положении тумблера *10* «Вкл» на панели установки зажигается сигнальная лампочка *12*. Пуск шарика осуществляется кнопкой *11*. При контакте шарика с рабочей поверхностью установки замыкается контакт *5* и включается электрический секундомер *9,* отсчитывающий время движения шарика по рабочей поверхности установки. Описывая параболическую

траекторию, шарик ударяется о планку *8* или *14*. При этом замыкается контакт, вмонтированный в эти планки, и останавливается секундомер.

После нескольких прикидочных пусков шарика миллиметровая бумага, расположенная на рабочей поверхности установки, покрывается копировальной бумагой. Затем осуществляется 10 рабочих пусков шарика, и на миллиметровой бумаге остается след траектории движения шарика.

Подготовка протокола к работе

(*Выполняется во внеаудиторное время при подготовке к занятию*)

Запишите в лабораторной тетради номер и название работы.

Запишите в тетради заголовок: «***Задание 1. Определение траектории и ускорения центра масс шарика при его качении по наклонной плоскости***».

Запишите формулы, используемые при выполнении ***Задания 1*** с расшифровкой буквенных обозначений, и табл. 1 для записи результатов измерений.

Для нахождения υ_{0x} используем свойство равномерного движения:

$$\upsilon_{0x} = \frac{x_1}{t_1} = \frac{x_2}{t_2} = \ldots; \qquad \upsilon_{0y} = \upsilon_{0x} \cdot \mathrm{t}g\,\alpha_0; \qquad \upsilon_0 = \sqrt{\upsilon_{0x}^2 + \upsilon_{0y}^2}.$$

Табл. 1

№	x_i, м	y_i, м	z_i, м	t_i, c	υ_0, м с$^{-1}$	υ_{0x}, м с$^{-1}$	υ_{0y}, м с$^{-1}$	a_y, м с$^{-2}$
1								
2								
3								
4								
5								
6								
$R_{кр}$(в точке O) =___м; $\varepsilon_{R_{кр}}$ =___%					$R_{кр}$ (в точке B) =___м; $\varepsilon_{R_{кр}}$ =___%			

Оставьте в тетради место (0,5 стр.) для вспомогательных записей и вычислений и запишите заголовок: «***Задание 2. Определение момента инерции шарика относительно мгновенной оси и оси, проходящей через его центр масс***».

Запишите формулы, используемые при выполнении ***Задания 2*** с расшифровкой буквенных обозначений, и табл. 2 для записи результатов измерений.

Табл. 2

Момент инерции шарика относительно мгновенной оси вращения I_1		Момент инерции шарика относительно оси вращения, проходящей через его центр масс I_0	
Эксперимент	Теория	Эксперимент	Теория
ε_{I_1} =_____%		ε_{I_0} =_____%	

Измерения и обработка результатов

Задание 1

Получите на миллиметровой бумаге траекторию движения шарика. Выберите на траектории 6 точек. Измерьте и запишите для каждой из этих точек координаты y_i, время t_i (подвижная планка (8) в этих измерениях устанавливается вблизи выбранной точки траектории), отрезки $\upsilon_{0y}t_i$, а также угол наклона α_0 касательной к траектории в начальной точке и углов φ и β, где β (β-угол между направлением мгновенной скорости и осью *X)*. Запишите в тетрадь абсолютные ошибки прямых измерений перечисленных выше величин.

Из этих измерений вычислите средние значения скоростей υ_{0x}, υ_{0y} и υ_0, также координаты $z_i = \upsilon_{0y}t_i - y_i$. Постройте график в координатах $\{t^2, z_i\}$ (см. **В7** [4]) и определите ускорение движения шарика a_y. Вычислите относительную ошибку a_y. Вычислите радиусы кривизны траектории $R_{кр}$ в точках *O* и *B* (см. рис 8.1 и задачу 2.25 в [5]) и относительную ошибку косвенных измерения $R_{кр}$ - $\varepsilon_{R_{кр}}$ (см. **В4** [4] и ***Приложение*** в настоящей работе). Обратите внимание. что в точке *O* угол $\beta = \alpha_0$, в точке *B* угол $\beta = 0$. Значения x, y, z, t , υ_0, υ_{0x}, υ_{0y}, α_y, $R_{кр}$ и $\varepsilon_{R_{кр}}$ и внесите в табл. 1.

Задание 2

Измерьте массу m и радиус r шарика и угол наклона рабочей поверхности к горизонту φ и запишите в тетрадь эти значения и абсолютные ошибки этих прямых измерений. Пользуясь значением a_y, полученным при выполнении ***Задания 1***, вычислите момент инерции шарика относительно мгновенной оси вращения I_1, и оси, проходящей через его центр масс I_0. Рассчитайте теоретические значения I_1 и I_0. Данные вычислений I_1, I_0, и относительные ошибки их косвенных измерения ε_{I_1} и ε_{I_0} (см. **В4** в [4] ***Приложение*** в настоящей работе) внесите в табл. 2.

Приложение

Задание 1

Так как ускорение $a_y = \frac{2Z_i}{t^2}$, то относительная ошибка этого косвенного измерения равна (см. примеры в **В4** в [4]): $\varepsilon_{a_y}^2 = \varepsilon_{Z_i}^2 + 4\varepsilon_{t_i}^2$.

Радиус кривизны траектории $R_{кр}$ в точках *O* и *B* вычисляется, используя (3) и результаты прямых и косвенных измерений. На рис. 8.1 видно, что в точках *O* и *B* нормальные ускорения равны, соответственно (см. также задачу 2.25 в [5]):

$$a_n(\text{т. } O) = a_y(\text{т. } O)\cdot \cos\beta \qquad \text{и} \qquad a_n(\text{т. } B) = a_y(\text{т. } B). \tag{7}$$

Тогда, используя примеры в В4 [4] и (3) получим

для т. *O*: $\varepsilon_{R_{кр}}^2 = \varepsilon_{a_y}^2 + 4\varepsilon_{\upsilon}^2 + \varepsilon_{\beta}^2 \cdot tg^2\beta$; для т. *B*: $\varepsilon_{R_{кр}}^2 = \varepsilon_{a_y}^2 + 4\varepsilon_{\upsilon}^2$. (8)

Задание 2

Момент инерции шарика относительно мгновенной оси вращения I_1 вычисляется, используя (6) и результаты прямых и косвенных измерений. Тогда

из (6) и примеров в **В4** [4] следует, что относительная ошибка косвенных измерений I_1 равна:

$$\varepsilon_{I_1}^2 = \varepsilon_m^2 + 4\varepsilon_r^2 + \varepsilon_g^2 + \varepsilon_\varphi^2 / tg^2\varphi + \varepsilon_{a_y}^2. \quad (9)$$

Относительную ошибку косвенных измерений I_0 получите самостоятельно.

Рекомендуемая литература:

1. Гершензон Е.М., Малов Н.Н., Мансуров А.Н. Курс общей физики. Механика» (2001), гл. 5, §5.1–5.6, гл. 10, § 10.1.

2. Савельев И.В. Курс общей физики в 5 томах, т. 1, Механика (5-е изд., 2011), гл.1, §1.1–1.7, гл. 5.

3. Сивухин Д.В. Общий курс физики в 5-ти томах, т. 1, Механика (4-е изд., 2005), гл.1 § 2–4, гл. III §19 гл. V, § 30–36, гл. VI §39-42, гл. VII §44-48.

4. Введение в физический практикум.

5. Механика. Задачи и решения. А.Б. Казанцева, М.С. Каменецкая, и др.- М.; КолосС, 2005.

Примерные контрольные вопросы

1. Докажите, что в общем случае центр масс твердого тела, движущегося в поле постоянной силы, описывает параболу. Получите уравнение траектории движения центра масс твердого тела, брошенного под углом к горизонту.

2. Получите формулу для вычисления ускорения центра масс твердого тела по известным значениям максимальной высоты и времени подъема.

3. Получите формулы для вычисления мгновенного радиуса кривизны траектории движения центра масс шарика для начальной точки *O* и в точке максимального подъема *B*.

4. Докажите, что при постоянном значении модуля начальной скорости существуют две траектории (навесная и настильная), имеющие одинаковые значения координаты *x* при *y* = 0. Докажите, что в этом случае имеет место соотношение: $\alpha_0' = 90 - \alpha_0$, где α_0' и α_0 - углы наклона касательной в точке *O* к оси *x* для настильной и навесной траекторий движения, соответственно.

5. Получите формулу для ускорения движения центра масс шарика при скатывании его по наклонной плоскости, используя закон сохранения энергии. Объясните, почему при этом работа силы трения сцепления не учитывается.

6. Влияет ли сила трения качения на полученные вами результаты? Ответ обоснуйте, проделав необходимые расчеты.

7. Вычислите момент инерции простейших тел: кольца, диска, шара и палочки.

8. Получите формулы для вычисления относительных ошибок косвенных измерений радиуса кривизны траектории и момента инерции шарика.

Лабораторная работа № 1.9[1)]

Изучение свойств физического маятника

Введение

Физическим маятником называется твердое тело, которое может качаться относительно неподвижной горизонтальной оси. Положение тела в каждый момент времени можно характеризовать углом отклонения φ от положения равновесия (вертикали). И в соответствии с уравнением динамики вращательного движения твердого тела момент M возвращающей силы можно записать в виде:

$$M = I\varepsilon_{\text{уг}} = I\ddot{\varphi} = -mga\sin\varphi \approx -mga\varphi, \qquad (1)$$

где I - момент инерции маятника относительно оси; a - расстояние от оси до центра масс маятника. Момент возвращающей силы создается силой тяжести, приложенной в центре масс маятника (знак минус обусловлен тем, что момент M и препятствует возрастанию угла φ).

Соотношение (1) можно записать в виде:

$$I\ddot{\varphi} + mga\varphi = 0 \qquad \text{или} \qquad \ddot{\varphi} + \frac{mga}{I}\varphi = 0.$$

Обозначая $\omega_0 = \sqrt{\frac{mga}{I}}$, получим уравнение:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0.$$

Решение этого уравнения известно из кинематики колебательного движения и имеет вид:

$$\varphi = \varphi_0\cos(\omega_0 t + \alpha).$$

Из последнего выражения следует, что при малых колебаниях физический маятник совершает гармонические колебания с циклической частотой ω_0 и периодом:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_{\text{пр}}}{g}}, \qquad (2)$$

где $l_{\text{пр}} = I/ma$ – называют *приведенной длиной физического маятника*.

Используя теорему Штейнера, можно получить:

$$I = I_0 + ma^2,$$

где I_0 - момент инерции маятника относительно оси, проходящей через центр масс маятника и параллельной оси подвеса, а a - расстояние от оси подвеса до центра масс маятника, m - его масса.

Тогда приведенная длина физического маятника равна:

$$l_{\text{пр}} = a + I_0/(ma). \qquad (3)$$

Подставляя (3) в (2), получим:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + ma^2}{mga}} \qquad (4)$$

[1)] Подготовлено преподавателями КОЭФ Александровым В.Н., Васильевой И.А. и Коротаевой Е.А.

Исследуем зависимость $l_{пр}(a)$. Возьмем производную от $l_{пр}(a)$ по a и найдем экстремум. Величина a_0, соответствующая экстремуму (минимуму), равна:

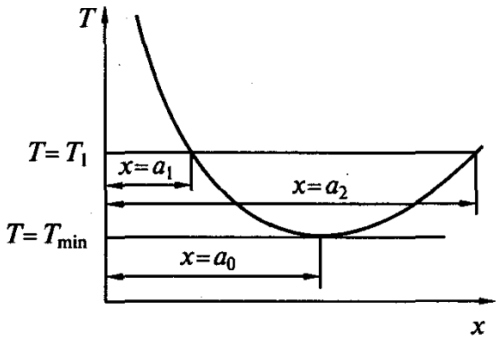

Рис. 9.1.

$$a_{0=}\sqrt{I_0/m}\,, \qquad (5)$$

а для тонкого однородного стержня:

$$a_0 = L/\sqrt{12} \qquad (6)$$

Из графика зависимости $T(a)$ можно найти значение a_0. Заметим, что на нем одному и тому же значению периода соответствуют два разных значения точки подвеса a_1 и a_2, что в свою очередь говорит о равенстве $l_{пр}$ для этих точек. Приравняв $l_{пр}$ для a_1 и a_2, получим соотношение:

$$a_1 \cdot a_2 = a_0^2\,, \qquad (7)$$

а подставив это соотношение в выражение для $l_{пр}$, получим:

$$l_{пр} = a_1 + a_2, \qquad (8)$$

Полученное соотношение (8) дает возможность найти по графику $l_{пр}$ и, используя затем формулу(2), найти значения g ускорения свободного падения.

Этим измерениям посвящена настоящая работа.

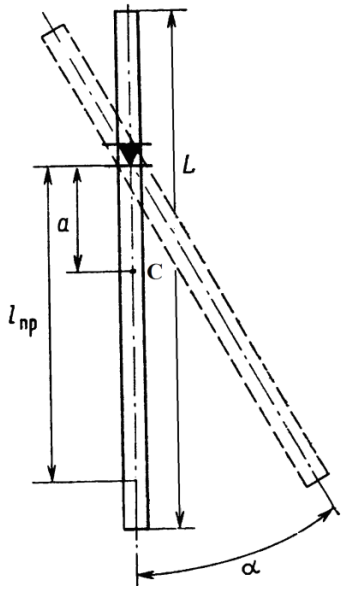

Рис. 9.2.

Экспериментальные задачи, поставленные в работе:

- изучение свойств физического маятника;
- экспериментальное определение ускорения свободного падения;
- определение абсолютной и относительной ошибок косвенных измерений.

Описание экспериментальной установки

Физический маятник, используемый в эксперименте (рис. 9.2), представляет собой однородный металлический стержень длиной L, на котором нанесены сантиметровые деления. По стержню может передвигаться опорная призма. Положение центра масс стержня **C** находится из условия равновесия стержня на опорной призме (рис. 9.3). Необходимые в работе линейные размеры стержня измеряются соответствующими измерительными инструментами.

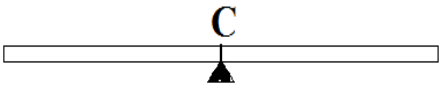

Рис. 9.3.

Подготовка протокола к работе

(*Выполняется во внеаудиторное время при подготовке к занятию*)

Запишите в лабораторной тетради номер и название работы.

Запишите в тетради заголовок: «***Задание. Изучение свойств физического маятника***»

Запишите формулы, используемые при выполнении ***Задания*** с расшифровкой буквенных обозначений, и подготовьте табл. 1 для записи результатов измерений.

Табл. 1

№	a, м	t_{40}, с	$T_{эксп}$, с	$l_{пр}^{эксп}$, м	$l_{пр}^{теор}$, м	$\Delta l_{пр}/l_{пр}$, %	g, м·с$^{-2}$
1							
2							
i							
$a_0^{эксп}$ =_____м			$l_{пр}^{эксп}$ (*мин*)=___м		$g_{ср}$=___, м с$^{-2}$		
$a_0^{теор}$ =___м			$l_{пр}^{теор}$ *(мин)*=___м		ε_g =_____ %		

Измерения и обработка результатов

З а д а н и е

Измерения. В эксперименте измеряются периоды колебаний маятника при перемещении точки подвеса от середины, начиная с 5 см от центра масс, с шагом 5 см к концу стержня. Изменением положения центра масс маятника при движении опорной призмы по стержню пренебрегают ввиду малой массы опорной призмы по сравнению с массой стержня. Период колебания маятника находится путем измерения времени t_{40} сорока полных колебаний маятника, а именно: $T_{эксп}=t_{40}$ /40. Особенно тщательно измерения проводятся около точки, соответствующей минимальному периоду колебаний.

Построение графика (см. раздел В7 в [4] и раздел «Построение графика» в *лабораторной работе* 1.2). Постройте график зависимости $T(a)$ и определите экспериментальные значения $l_{пр}^{эксп}$ для трех значений периода колебаний (см. рис 9.1), один из которых равен T_{min}.

Вычисления. Используя соотношение (2), вычислите ускорение свободного падения g для каждого из трех выбранных значений периода. В качестве итогового результата вычислите среднее арифметическое этих значений.

Приняв исследуемый маятник за тонкий однородный цилиндр длиной L, вычислите теоретические значения $l_{пр}^{теор}$ для выбранных значений $T(a)$ и сравните их с экспериментальными.

Данные измерений и вычислений t_{40}, $T_{эксп}$, a, $l_{пр}^{эксп}$, $l_{пр}^{теор}$ и g внесите в табл. 1. Вычислите относительные ошибки косвенных измерений g (см. **В4** в [4] и ***Приложение*** в настоящей работе) и внесите их в табл. 1.

Приложение

Ускорение свободного падения вычисляется по результатам прямых измерений по формуле (4), то есть косвенным измерением. Из (2) можно получить:

$$g = 4\pi^2(l_{пр})/(T^2). \qquad (9)$$

Тогда, используя (5) и примеры в **В4** [4], получим относительную ошибку косвенных измерений g:

$$\varepsilon_g^2 = 4\varepsilon_\pi^2 + \varepsilon_{l_{\text{пр}}}^2 + 4\varepsilon_T^2, \quad \text{где} \quad \varepsilon_T = \varepsilon_{t;} \quad \varepsilon_{l_{\text{пр}}}^2 = \varepsilon_{a_1}^2 + \varepsilon_{a_2}^2 \qquad (10)$$

Рекомендуемая литература:

1. Гершензон Е.М., Малов Н.Н., Мансуров А.Н. Курс общей физики. Механика» (2001), гл. 5, §5.6, гл. 6.

2. Савельев И.В. Курс общей физики в 5 томах, т. 1, Механика (5-е изд., 2011), гл. 8 §8.1–8.6.

3. Сивухин Д.В. Общий курс физики в 5-ти томах, т. 1, Механика (4-е изд., 2005), гл. VI §39-41.

4. Введение в физический практикум.

Примерные контрольные вопросы

1. Дайте определение физического маятника и получите выражение для приведенной длины используемого в работе маятника.

2. Покажите, используя (4), что для любой точки (оси) подвеса физического маятника можно найти другую точку с тем же периодом колебаний, называемой сопряженной.

3. Получите формулы (5), (6), (7), (8).

3. Как определить положение центра масс физического маятника, если известно положение сопряженных точек подвеса?

4. Как расположены сопряженные точки у физического маятника, используемого в работе.

5. Почему амплитуда колебаний маятника при измерениях его периода должна быть небольшой?

6. Что является основным источником ошибок при определении g использованным вами методом?

7. Как влияет трение в системе на точность определения g?

8. Вычислите момент инерции простейших тел: кольца, диска, шара, тонкого однородного стержня.

9. Получите соотношение (10) для вычисления относительной ошибки косвенных измерений g.

Лабораторная работа № 1.10[1)]

Изучение свободных колебаний физического маятника

Введение

Свободные колебания реального маятника являются затухающими, так как энергия, сообщенная системе, постепенно расходуется на преодоление сил трения. Закон убывания амплитуды зависит от характера сил трения, действующих на маятник.

В данном эксперименте силу сопротивления и, следовательно, тормозящий момент $M_{\text{тр}}$ можно считать пропорциональными скорости, т. е. $M_{\text{тр}} = -r_{mp}\dfrac{d\varphi}{dt}$, где r_{mp} – коэффициент трения, φ – угловое перемещение маятника.

Уравнение движения для малых колебаний маятника имеет в этом случае вид:

$$I_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -r_{mp}\frac{d\varphi}{dt} - mgl\varphi$$

или

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\beta\frac{d\varphi}{dt} + \omega_0^2\varphi = 0, \qquad (1)$$

где $\beta = r_{\text{тр}}/2I_z$ – коэффициент затухания, $\omega_0 = \sqrt{mgl/I_z}$ – собственная угловая частота колебаний маятника, m – масса маятника, I_z – момент инерции маятника относительно оси вращения, l – расстояние от центра масс маятника до оси вращения Z.

Решение уравнения (1) для случая $\beta^2 < \omega_0^2$ (малое сопротивление среды) имеет вид:

$$\varphi(t) = \varphi_m \cos(\omega t + \gamma), \qquad (2)$$

$$\varphi_m = \varphi_{m_0} e^{-\beta t}, \qquad (2a)$$

где $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ — угловая частота свободных колебаний, а φ_{m_0}, γ — соответственно начальные амплитуды и фаза колебаний.

Наряду с коэффициентом затухания β при анализе колебательных систем широко используется понятие добротности системы. Добротность характеризует относительную убыль энергии колебаний за период [1]:

$$Q = 2\pi\frac{E}{A_{\text{тр}}} = \frac{\pi}{\delta} = \frac{\omega_1}{2\beta}, \qquad (3)$$

где E – полный запас энергии системы, $A_{\text{тр}}$ – работа против сил трения за период колебаний, δ – логарифмический декремент затухания. При малых колебаниях с небольшим трением ($\beta << \omega_0$) $\omega_1 \approx \omega_0$, и выражение для добротности принимает вид:

[1)] Подготовлено преподавателями КОЭФ Александровым В.Н., Васильевой И.А. и Коротаевой Е.А.

$$Q = \frac{\omega_1}{2\beta} \approx \frac{\omega_0}{2\beta}, \qquad (4)$$

В работе определяется добротность физического маятника. Как следует из (4), для вычисления добротности необходимо определить коэффициент затухания β и угловую частоту свободных колебаний маятника.

Экспериментальные задачи, поставленные в работе:

- изучение свободных колебаний физического маятника;
- определение добротности физического маятника;
- определение абсолютной и относительной ошибок косвенных измерений.

Описание экспериментальной установки

Маятник представляет (рис. 10.1) собой стержень с грузом на нижнем конце, подвешенный с помощью двух игольчатых опор на специальном кронштейне. Маятник может совершать колебания в вертикальной плоскости. Зеркальце, расположенное на верхнем конце маятника, отражает падающий на него от осветителя свет (“зайчик”) на шкалу. Перемещения “зайчика” по шкале следуют за колебаниями маятника: расстояние d, на которое смещается “зайчик” по измерительной шкале от нулевого положения равно:

$$d(t)=L\cdot\varphi(t), \qquad (5)$$

где L – расстояние от зеркала до шкалы, $\varphi(t)$ – угловое смещение маятника.

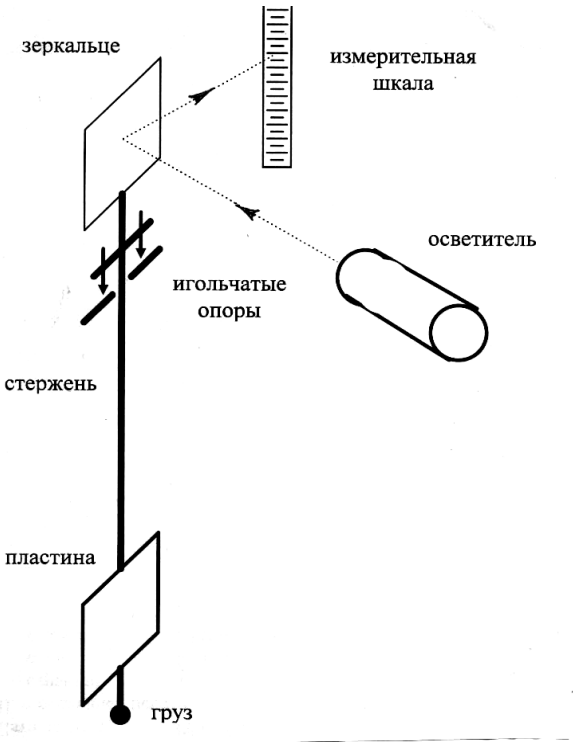

Рис. 10.1.

Для увеличения затухания к стержню маятника прикрепляется металлическая пластина. Располагая пластину под разными углами по отношению к плоскости колебаний маятника, можно изменить затухание и добротность системы в несколько раз.

Подготовка протокола к работе

(*Выполняется во внеаудиторное время при подготовке к занятию*)

Запишите в лабораторной тетради номер и название работы.

Запишите в тетради заголовок: «***Задание 1***. **Определение параметров маятника при малом затухании**».

Запишите формулы, используемые при выполнении ***Задания 1*** с расшифровкой буквенных обозначений, и табл. 1 и 2 для записи результатов измерений.

Выведите формулу для вычисления относительной ошибки определения коэффициента затухания ε_β (см. примеры в **В4** [5]).

Табл. 1

N	t_i, с	T_1, с	$\omega_{1.1}$, с$^{-1}$	$\overline{\omega}_{1.1}$, с

Табл. 2

k_i	15	13	11	9	7	5	3
t_i	0						
k_{15}/k_i							
$ln(k_{15}/k_i)$							
β_1=____ с$^{-1}$		ε_β=___ %		ω_{01}=__ с$^{-1}$		Q_1=__	

Подготовьте два листа миллиметровки для построения графиков и ознакомьтесь с правилами их построения в **В7** [5] и в разделе ***Построение графика*** в ***лабораторной работе* № 1.2**.

Запишите в тетради заголовок: «***Задание 2. Определение характеристик маятника с тормозящей пластиной***».

Запишите формулы, используемые при выполнении ***Задания 2*** с расшифровкой буквенных обозначений, и табл. 3 и 4 для записи результатов измерений.

Табл. 3

N	t_i, с	T_2, с	$\omega_{1.2}$, с$^{-1}$	$\overline{\omega}_{1.2}$, с

Табл. 4

k_i	15	13	11	9	7	5	3
t_i	0						
k_{15}/k_i							
$ln(k_{15}/k_i)$							
β_2=____ с$^{-1}$		ε_β=___ %		ω_{02}=__ с$^{-1}$		Q_2=__	

Подготовьте два листа миллиметровки для построения графиков и ознакомьтесь с правилами их построения в **В7** [5] и в разделе ***Построение графика*** в ***лабораторной работе* № 1.2**.

Измерения и обработка результатов

Задание 1

Сначала определяется угловая частота свободных колебаний маятника с металлической пластиной, повернутой параллельно плоскости колебания

маятника, - ω_{11}. Для этого измеряется время N=20 полных колебаний маятника. Начальное отклонение "зайчика" рекомендуется выбрать равным 17 делениям шкалы – k_{17}. Угловая частота вычисляется по формуле: $\omega_{11} = 2\pi N / t$, где N – число полных колебаний, t – время N полных колебаний. Результаты трех измерений и вычислений заносятся в табл. 1.

Коэффициент затухания β_1 определяется из графика зависимости амплитуды колебаний от времени. Начальное отклонение маятника составляет 17 делений шкалы. Секундомер включают, когда амплитуда колебаний становится равной 15 делениям шкалы, после чего фиксируют показания секундомера, когда амплитуда принимает значение в первом измерении 13, в последующих: 11, 9, 7 5 и 3 делений шкалы и эти данные заносятся в табл. 2.

Используя формулу (5) и учитывая конфигурацию установки (рис. 10.1), можно показать, что угол φ, расстояние d и деления измерительной шкалы k пропорциональны друг другу: $\varphi_{mi} \sim d_i \sim k_i$. Кроме того, в эксперименте непосредственно измеряются либо фиксируются величины t_i и k_i. Поэтому рекомендуется строить зависимости $\varphi_m(t)$ и $ln\varphi_m(t)$ в координатах $\{t, \frac{k_{15}}{k_i}\}$ и $\{t, ln\,(\frac{k_{15}}{k_i})\}$ (см. **В7** в [5]), соответственно.

Проведите соответствующие вычисления (см. табл. 2) и постройте графики зависимостей $[\frac{k_{15}}{k_i}](t)$ и $[ln(\frac{k_{15}}{k_i})](t)$ для маятника с малым затуханием. В выбранных координатах в первом случае точки должны располагаться на экспоненте, во втором – вдоль прямой с тангенсом угла наклона, численно равным β_1. Это является результатом функциональной зависимости амплитуды затухающих колебаний от времени (2).

Вычислите β_1, ε_β, ω_{01} и Q_1. Внесите результаты вычислений в табл. 2.

Задание 2

Установите тормозящую пластину на маятник перпендикулярно плоскости качания маятника. Проведите все необходимые измерения, вычисления и построения графиков в последовательности и по методике ***Задания 1***. Данные измерений и вычислений внесите в табл. 3 и 4.

Сравните полученные в двух заданиях значения собственных угловых частот ω_{01} и ω_{02} и объясните полученный результат.

Рекомендуемая литература:

1. Гершензон Е.М., Малов Н.Н., Мансуров А.Н. Курс общей физики. Механика» (2001), гл. 5, §5.6, гл. 6.

2. Иродов И.Е., Механика. Основные законы (11-е изд., 2013), гл. VI §6.3.

3. Савельев И.В. Курс общей физики в 5 томах, т. 1, Механика (5-е изд., 2011), гл. 8 §8.1–8.6, 8,9.

4. Сивухин Д.В. Общий курс физики в 5-ти томах, т. 1, Механика (4-е изд., 2005), гл. VI §39-41.

5. Введение в физический практикум.

Примерные контрольные вопросы

1. Что называется свободными колебаниями маятника? Как сдвинуты по фазе перемещение и скорость точки при свободных колебаниях?

2.Что называется временем релаксации затухающего маятника? Как оно связано с коэффициентом затухания?

3. Что такое декремент затухания, логарифмический декремент затухания? Объясните их физический смысл.

4. Дайте определение добротности маятника. Как она связана с коэффициентом затухания?

5. Зависит ли частота собственных колебаний тела от его массы?

6. С какой точностью в каждом эксперименте можно определить собственную частоту колебаний маятника?

7. Укажите положительные стороны и недостатки зеркального метода отсчета, использованного в работе.

8. Можно ли по данным эксперимента проверить линейность зависимости момента сил трения от угловой скорости движения маятника?

9. Объясните, как по результатам построения графиков находят β.

10. Запишите уравнение затухающих колебаний и получите его решение. По какому закону убывает энергия затухающих колебаний?

11. Покажите, что из (2а) и примеров в В4 [5] следует, что для относительной ошибки определения коэффициента затухания ε_β для k_i – измерения, можно записать:

$$\varepsilon_\beta(k_i) = \varepsilon_{t_i}/ln(k_{15}/k_i).$$

Лабораторная работа № 1.11[1)]

Изучение вынужденных колебаний

Введение

В инерциальной системе отсчета вынужденные колебания физического маятника в поле силы тяжести описываются уравнением

$$I_z \frac{d^2\alpha}{dt^2} = M_g + M_r + M_{вын} \qquad (1)$$

где α - угол отклонения маятника от положения равновесия, M_g, M_r и $M_{вын}$ - соответственно моменты сил тяжести и трения, а также вынуждающей, действующей на маятник, I_z — момент инерции маятника относительно оси вращения *Z*.

При малых α ($M_g = -mgl\sin\alpha \approx -mgl\alpha = -k\alpha$) и момент сил трения можно считать пропорциональным угловой скорости маятника ($M_r = -r_{mp}\frac{d\alpha}{dt}$).

Если внешняя (вынуждающая) сила изменяется со временем по гармоническому закону, то уравнение (1) принимает вид:

$$I_z \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -k\alpha - r_{mp}\frac{d\alpha}{dt} + M_0 \cos\omega t$$

или

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2\beta\frac{d\alpha}{dt} + \omega_0^2\alpha = \frac{M_0}{I_z}\cos\omega t, \qquad (2)$$

где $k = mgl$ – коэффициент момента силы тяжести, возвращающей маятник в положение равновесия, *m, l* и g - соответственно масса, расстояние от центра масс маятника до оси подвеса и ускорение свободного падения, $r_{тр}$ – коэффициент трения, $\beta = r_{тр}/(2I_z)$ – коэффициент затухания, $\omega_0 = \sqrt{k/I_z}$ – угловая частота собственных колебаний маятника, ω угловая частота момента вынуждающей силы, M_0 – амплитуда момента вынуждающей силы.

Движение маятника, описываемое этим уравнением, является сложным. Оно представляет собой сумму вынужденных гармонических колебаний с некоторой угловой амплитудой α_0 и угловой частотой ω и свободных колебаний, затухающих с течением времени и имеющих частоту

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \qquad (3)$$

Однако, после переходного процесса, когда свободные колебания затухнут, маятник начнет колебаться по гармоническому закону (стационарный режим) с некоторым сдвигом по фазе φ по отношению к вынуждающему воздействию:

$$\alpha = \alpha_0 \cdot \cos(\omega t - \varphi), \qquad (4)$$

где

$$\alpha_0 = \frac{M_0/I_z}{\sqrt{\left(\omega_0^2+\omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \qquad (5)$$

и

$$tg\varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}. \qquad (5а)$$

[1)] Подготовлено преподавателями КОЭФ Александровым В.Н., Васильевой И.А. и Коротаевой Е.А.

В настоящей работе изучаются вынужденные колебания физического маятника с подвижной точкой подвеса.

Экспериментальные задачи, поставленные в работе:

- экспериментальное изучение движения тела в неинерциальной системе отсчета;
- исследование амплитудной и фазовой характеристики вынужденных колебаний;
- определение абсолютной и относительной ошибок косвенных измерений.

Описание экспериментальной установки

Экспериментальная установка представляет собой два маятника. Причем один из них (малый), подвешен в некоторой точке *E* другого (большого). На рис. 11.1 схематически изображены оба маятника и их взаимное расположение в произвольный момент времени. Они могут совершать колебательное движение в вертикальной плоскости (плоскости рисунка) относительно горизонтальных осей (перпендикулярны плоскости рисунка), проходящих через точку *O* для большого маятника и точку *E* для маленького. Большой маятник, состоящий из стержня *AB*, вдоль которого могут перемещаться массивные грузы *D*. Перемещение грузов по стержню позволяет изменять период колебаний большого маятника. Угол отклонения от вертикали γ отсчитывается по шкале *M*. Угловая амплитуда α, установившихся вынужденных колебаний малого маятника, определяется по шкале *N*.

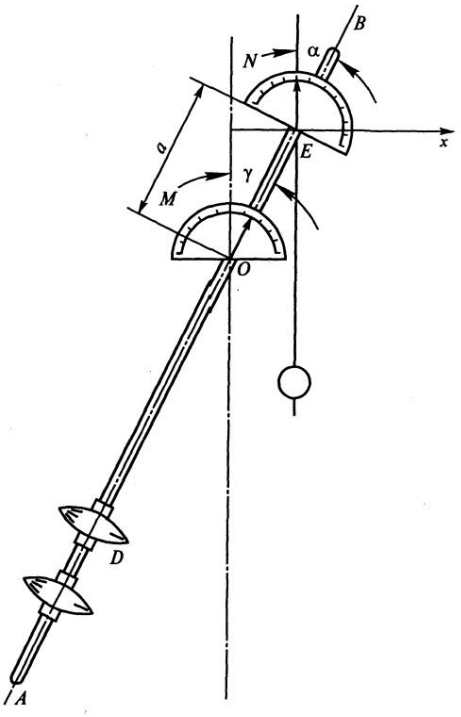

Рис. 11.1.

Как видно из схемы, малый маятник участвует в двух независимых движениях: поступательном вместе с точкой подвеса (при малых колебаниях большого маятника) и колебательном. Это позволяет в дальнейшем рассматривать только колебательное движение, перейдя в систему отсчета, связанную с его точкой подвеса.

Запишем в этой системе уравнение движения малого маятника. При малых колебаниях большого маятника можно считать, что точка подвеса совершает гармонические колебания по прямой *X* по закону $x=X_0\cdot\cos(\omega t)$, где X_0 - амплитуда смещения точки подвеса, ω - угловая частота колебаний большого маятника. Следовательно, выбранная система отсчета является неинерциальной, так как она

движется с ускорением $a_{сис} = - X_0\omega^2\cos(\omega t)$. Чтобы в такой системе записать уравнение движения малого маятника, нужно кроме действующих сил тяжести и трения учесть силу инерции $F_{ин}$:

$$F_{ин} = -m\frac{d^2x}{dt^2} = mX_0\omega^2\cos\omega t.$$

Эта сила является вынуждающей для колебаний малого маятника и ее максимальный момент относительно центра масс малого маятника – $M_0 = mX_0l\omega^2$, где l – расстояние от точки подвеса малого маятника до его центра масс.

Таким образом, на малый маятник в процессе его движения действуют три силы: сила тяжести, сила трения (пропорциональная скорости) и гармонически изменяющаяся вынуждающая сила инерции, в результате действия которых маятник начинает раскачиваться, то есть приобретает угловое ускорение.

Следовательно, введя те же обозначения, что и в (2), уравнение колебательного движения малого маятника имеет вид:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2\beta\frac{d\alpha}{dt} + \omega_0^2\alpha = \frac{M_0}{I_z}\cos\omega t\,. \qquad (6)$$

Амплитуда этих колебаний и разность фаз момента вынуждающей силы и смещения определяются уравнениями (5).

Конструкция экспериментальной установки дает возможность варьировать частоту вынуждающей силы и, следовательно, позволяет получить экспериментальную зависимость $\alpha_0=\alpha(\omega)$ (амплитудная характеристика маятника).

Фазовая характеристика колебаний малого маятника ($\varphi = \varphi(\omega)$) может быть рассчитана по формуле (4), а коэффициент затухания β и частота собственных колебаний ω_0 определяются экспериментально.

Подготовка протокола к работе

(*Выполняется во внеаудиторное время при подготовке к занятию*)

Запишите в лабораторной тетради номер и название работы.

Запишите в тетради заголовок: «***Задание 1. Определение частоты и коэффициента затухания собственных колебаний малого маятника при малом затухании***».

Запишите формулы, используемые при выполнении ***Задания 1*** с расшифровкой буквенных обозначений, и табл. 1 для записи результатов измерений. Выведите

формулы для вычисления относительных ошибок определения коэффициента затухания ε_β и угловой частоты свободных колебаний ε_{ω_1} (см. примеры в **В4** [5]).

Табл. 1

α_{m_i}, дел.	15	13	11	9	7	5	3
t_i, с	0						
$\alpha_{m_0}/\alpha_{m_i}$							
N=10, t = _____с, T_1 = _____с,			$\alpha_{m0}/\alpha_{m\tau}=e$ = 2,7 ω_1= _____$с^{-1}$,			β= _____$с^{-1}$, τ= _____с.	
ε_{ω_1}=_____%				ε_β=_____%			

Подготовьте два листа миллиметровки для построения графиков и ознакомьтесь с правилами их построения в **В7** [5] и в разделе ***Построение графика*** в ***лабораторной работе* № 1.2.**

Оставьте 0,5 стр. для вспомогательных записей и вычислений.

Запишите в тетради заголовок: «***Задание 2. Изучение амплитудной характеристики колебаний малого маятника*** $\alpha_m=\alpha(\omega)$».

Запишите формулы, используемые при выполнении ***Задания 2*** с расшифровкой буквенных обозначений, и табл. 2 для записи результатов измерений. Подготовьте лист миллиметровки для построения графика.

Табл. 2

Число колебаний маятника – N	10									
Положение грузов	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ω, $с^{-1}$										
α_m, дел										
Разность фаз φ, рад										

Оставьте 0,5 стр. для вспомогательных записей и вычислений.

Запишите в тетради заголовок: «***Задание 3. Изучение фазовой характеристики вынужденных колебаний малого маятника***».

Запишите формулы, используемые при выполнении ***Задания 3*** с расшифровкой буквенных обозначений, и подготовьте лист миллиметровки для построения графика.

Измерение и обработка результатов

Задание 1

Значение коэффициента затухания определяется из графика зависимости амплитуды колебания малого маятника от времени. Аналитически эта зависимость выражается формулой:

$$\alpha(t) = \alpha_{m_0} e^{-\beta t}. \quad (7)$$

За время релаксации $\tau = 1/\beta$ амплитуда уменьшается в e раз ($e \cong 2{,}7$), то есть $\alpha_{m_\tau} = \alpha_{m_0}/e$ или $\alpha_{m_\tau}/\alpha_{m_0} = 1/e$. Таким образом, зная τ, легко вычислить β.

С другой стороны, из (7) следует, что $\alpha_{m_0}/\alpha(t) = e^{\beta t}$. Тогда, взяв натуральный логарифм этого соотношения, получим: $ln\frac{\alpha_{m_0}}{\alpha(t)} = \beta t$, то есть линейную зависимость от времени t. Поэтому коэффициент β нужно находить из графиков, построенных в координатах $\left\{t, \left(\frac{\alpha_{m_0}}{\alpha(t)}\right)\right\}$ или $\left\{t, ln\left(\frac{\alpha_{m_0}}{\alpha(t)}\right)\right\}$ (см. **В7** в [5]).

Перед началом измерений рекомендуется повторно ознакомиться с разделами **В5** и **В6** в [5].

Для определения β малого маятника большой маятник устанавливается в нерабочее положение (плоскости призм опираются на подставку). Малому маятнику дается начальное отклонение несколько большее 16 делений шкалы. Секундомер включают, когда амплитуда колебаний становится равной α_{m_0}=15 делениям шкалы, и его останавливают, когда в первом измерении значение амплитуды станет равным α_{m_1} =13 делениям шкалы. В дальнейшем секундомер останавливают, когда амплитуда уменьшается соответственно до 11, 9, 7, 5, 3 делений шкалы. Показания секундомера заносятся в табл. 1. По полученным данным строят график в выбранных координатах и проводят необходимые расчеты.

Для определения угловой частоты свободных колебаний маятника ω_1 измеряют время t десяти (N) полных колебаний маятника и вычисляют период T_1 и частоту ω_1 и заносят их в табл. 1. $\omega_1 = 2\pi N / t$.

Данные измерений α_{m_i}, и t_i и вычислений τ, β, T_1 и ω_1, а также их относительных ошибок косвенных измерений ε_β и ε_{ω_1} [5] занесите в табл. 1.

По результатам измерений вычислите значение собственной угловой частоты малого маятника ω_0.

Задание 2

Рекомендация: *Начинать выполнение* ***Задания 2*** *желательно под наблюдением преподавателя или инженера*.

Большой маятник устанавливается в рабочее положение путем поворота его на 90° вокруг оси, проходящей вдоль стержня маятника. Необходимо убедиться, что он установлен в нужной плоскости и лезвие призмы заняло положение в

канавке на опорной раме. Предварительно грузы устанавливаются в самом нижнем положении.

Большой маятник отклоняют примерно на 6° (такое начальное отклонение сохраняется при всех измерениях) и измеряют период колебания большого маятника (по времени 10 полных колебаний). После установления вынужденных колебаний (1,5 мин – это время надо выдерживать при всех измерениях), измеряют амплитуду вынужденных колебаний малого маятника и записывают в табл. 2.

Затем маятник приводится в нерабочее положение, и оба груза передвигаются на 2 деления вверх. Приводя маятник в рабочее положение, повторяют измерения до тех пор, пока верхний груз не займет крайнее верхнее положение (последнее измерение). Полученные данные представляются в виде графика в координатах $\{\omega, \alpha_m\}$.

Проведите необходимые измерения и постройте график зависимости амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы. Данные измерений t, α_m и вычислений ω внесите в табл. 2.

Задание 3

Прежде всего, следует убедиться, что при малых частотах смещение малого маятника находится практически в фазе со смещением точки подвеса (в противофазе со смещением нижней части большого маятника). Сдвиг фаз φ в этом случае близок к нулю.

При больших частотах смещение малого маятника практически находится в противофазе со смещением точки подвеса (в фазе со смещением нижней части большого маятника). Сдвиг фаз при этом близок к $\varphi = \pi$. Промежуточные значения вычисляются по формуле (5а), используя результаты предыдущих измерений в ***Задании 2***. Вычисления произведите для семи значений частоты: резонансной и по три на восходящей и нисходящей ветвях амплитудной характеристики.

Произведите необходимые вычисления и нанесите в соответствующем масштабе полученные результаты на график амплитудной характеристики (откладывая по оси абсцисс частоту вынуждающей силы ω, а по оси ординат величину сдвига фаз).

Рекомендуемая литература:

1. Гершензон Е.М., Малов Н.Н., Мансуров А.Н. Курс общей физики. Механика» (2001), гл. 8, §10.1-10.3, 11.1-11.5.

2. Савельев И.В. Курс общей физики в 5 томах, т. 1, Механика (5-е изд., 2011), гл. 4, §8.1–8.6, 8.9, 8.11.

3. Иродов И.Е., Механика. Основные законы (11-е изд., 2013), гл. VI, §6.4.

4. Сивухин Д.В. Общий курс физики в 5-ти томах, т. 1, Механика (4-е изд., 2005), §63-66.

5. Введение в физический практикум.

Примерные контрольные вопросы

1. Какие колебания называются вынужденными?

2. Выведите формулы для амплитуды и разности фаз между смещением и вынуждающей силой прямолинейных вынужденных колебаний (для пружинного маятника), возбуждаемых силой, меняющейся по гармоническому закону.

3. В чем состоит явление резонанса? Каково его значение в природе и технике?

4. Какую информацию о колебательной системе можно получить из резонансной кривой? Как меняется резонансная кривая при изменении коэффициента затухания?

5. При каких условиях возникает необходимость рассматривать силы инерции?

6. Какова роль силы трения в оси малого маятника (см. рис. 11.1, ось в т. *E*) при его вынужденных колебаниях?

7. Покажите, что из (6) и примеров в **B4** [5] следует, что относительная ошибка определения коэффициента затухания ε_β для α_{m_i} – измерения (считая, что величины α_{m_0} и α_{m_i} определяются с абсолютной точностью) равна:

$$\varepsilon_\beta(\alpha_{m_i}) = \varepsilon_{t_i}/ln(\alpha_{m_0}/\alpha_{m_i}).$$

8. Используя (3) и примеры в **B4** [5], найдите относительную ошибку определения частоты свободных колебаний ε_{ω_1} для α_{m_i} – измерения.

Лабораторная работа № 1.12[1)]

Измерение частот собственных колебаний струны методом резонанса

Введение

В гибкой, натянутой однородной струне, выведенной из положения равновесия, возникает сложное колебание, которое может быть представлено как наложение многих нормальных или собственных колебаний, отличающихся своими частотами. Стационарная картина колебаний может наблюдаться, если возмущение в струне вызывается внешней периодической (гармонической) силой. Смещение частиц струны под действием этой силы перпендикулярно к самой струне. Возникшее возмущение вызывает появление поперечной волны, распространяющейся по струне в обе стороны, и при определенных условиях в струне возникают поперечные стоячие волны – явление, называющееся резонансом струны.

На закрепленных концах струны всегда должны быть узлы смещения, так что поперечные стоячие волны, возникающие при собственных колебаниях струны, должны удовлетворять следующим условиям:

$$l = n\frac{\lambda_n}{2} \quad \text{или} \quad \nu_n = \frac{n \cdot u}{2l} \tag{1}$$

где l – длина струны, λ_n и ν_n – длина волны и частота собственного колебания, u – скорость распространения упругой деформации в струне, n – целое число.

Пусть в струне распространяется монохроматическая волна со скоростью u, причем амплитуда A мала по сравнению с длиной волны: $A<<\lambda$. Перейдем в новую систему отсчета, движущуюся вдоль струны со скоростью, равной скорости волны u и направленной в туже сторону. Эта система отсчета также является инерциальной и, следовательно, в ней справедливы законы Ньютона.

Рассмотрим в этой системе отсчета элемент струны длины Δl, которая много меньше длины волны λ, в тот момент, когда он находится на гребне синусоиды (рис. 14.1). Применим к этому элементу второй закон Ньютона. Поскольку рассматривается поперечная волна, в которой смещения элементов струны перпендикулярны направлению распространения волны, то горизонтальная составляющая силы натяжения $\vec{F}$ постоянно вдоль всей струны. Так как длина рассматриваемого участка $\Delta l << \lambda$,

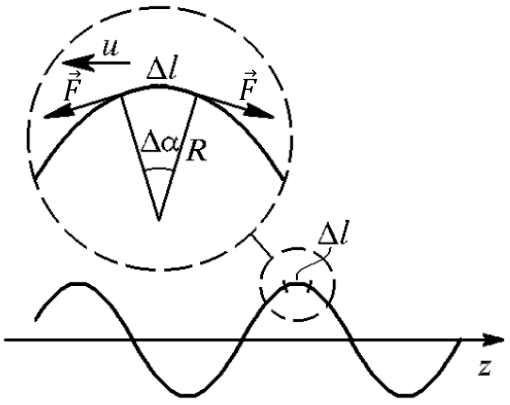

Рис. 12.1.

то направления сил натяжения, действующих на выделенный элемент, почти горизонтальны, а их модуль можно считать равным F. Равнодействующая этих

[1)] Подготовлено преподавателями КОЭФ Александровым В.Н., Васильевой И.А. и Коротаевой Е.А.

сил направлена вниз и равна $F \cdot \Delta\alpha$. Скорость рассматриваемого элемента в выбранной системе отсчета равна u, а малый участок его синусоидальной траектории вблизи горба можно считать дугой окружности радиуса R. Поэтому ускорение этого элемента струны направлено вниз и равно u^2/R. Массу элемента струны можно представить в виде $\rho S \Delta l$, где ρ – плотность материала струны, а S – площадь сечения, которые ввиду малости деформаций при распространении волны можно считать такими же, как и в отсутствии волны.

В этом случае второй закон Ньютона будет иметь вид:

$$F\Delta\alpha = \rho S \Delta l \frac{u^2}{R}.$$

Учитывая, что длина дуги $\Delta l = R \cdot \Delta\alpha$, получаем:

$$u = \sqrt{\frac{F}{S\rho}}. \qquad (2)$$

Из этого следует, что скорость распространения упругой деформации в струне не зависит от частоты собственного колебания и определяется плотностью материала струны ρ и ее натяжением, которое зависит от величины приложенного к струне механического напряжения $\sigma = F/S$

С учетом (2) из (1) получим:

$$\nu_n = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{F}{S\rho}}. \qquad (3)$$

Соотношение (3) позволяет экспериментально определить плотность материала струны, так как входящие в нее величины ν_n, n, F, S могут быть измерены. В работе собственные частоты колебаний струны определяются методом резонанса.

Экспериментальные задачи, поставленные в работе:

- изучение поперечных волн в струне;
- измерение собственных частот поперечных колебаний струны;
- расчет плотности материала струны;
- вычисление скорости распространения упругих колебаний в струне.

Описание экспериментальной установки

Схема экспериментальной установки дана на рис. 12.2. Сила натяжения струны *A* регулируется грузами *B*. Вынужденные колебания в струне возбуждаются вибратором *C*, частота колебаний которого определяется звуковым генератором. Амплитуда вынужденных колебаний струны максимальна при резонансе, то есть при совпадении собственной частоты и частоты вынуждающей силы.

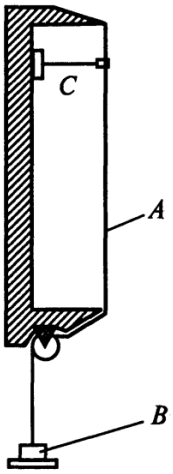

Рис. 12.2.

Подготовка протокола к работе

(*Выполняется во внеаудиторное время при подготовке к занятию*)

Запишите в лабораторной тетради номер и название работы.

Запишите в тетради заголовок: «***Задание 1. Измерение резонансной частоты колебаний струны в зависимости от силы ее натяжения***».

Запишите в тетради формулы, позволяющие объяснить зависимость резонансной частоты струны от силы ее натяжения.

Запишите в тетради заголовок: «***Задание 2. Определение плотности материала струны***».

Запишите в тетради формулы, позволяющие объяснить графический метод определения плотности материала струны ρ (см. также **В7** в [4]). Получите формулу для вычисления относительной ошибки ε_ρ определения ρ (см. **В4** в [4]).

Запишите в тетради заголовок: «***Задание 3. Определение скорости распространения колебаний в струне***».

Запишите в тетради формулы, позволяющие определить скорость распространения упругих колебаний в струне. Получите формулу для вычисления относительной ошибки ε_u определения u (см. **В4** в [4]).

Подготовьте табл. 1 для записи результатов измерений и вычислений ***Заданий 1 – 3***.

Табл. 1

l =____ м	d = ____мм	S = ___ мм^2	ρ = ____ кг/м^3	ε_ρ = _____ %
F, н	10	15	20	25
ν, Гц				
$u_1=\nu/2l$, м/с				
$u_2=\nu/l$, м/с				
$u_3=3\nu/2l$, м/с				
$u_4=2\nu/l$, м/с				
ε_u= _____ %				

Измерения и обработка результатов

Задание 1

Измерьте длину l и диаметр d струны. Измерьте частоты собственных колебаний струны для n = 1, 2, 3, 4 при F = 10, 15, 20, 25Н. Постройте график зависимости $(\nu_n/n)^2$ от F (на графике результаты, соответствующие различным n, обозначьте по-разному). Результаты измерений F, ν, l, d, n и вычислений $(\nu_n/n)^2$ и S внесите в табл. 1.

Задание 2

Пользуясь графиком, вычислите плотность струны ρ и внесите в табл. 1. Вычислите относительную ошибку измерения ρ в эксперименте.

Задание 3

Вычислите скорость распространения упругих колебаний в струне при различных значениях силы натяжения, внесите в табл. 1 и постройте график $u^2=f(F)$ Вычислите относительную ошибку измерения u в эксперименте для наиболее точных, по Вашему мнению, результатов.

Рекомендуемая литература

1. Гершензон Е.М., Малов Н.Н., Мансуров А.Н. Курс общей физики. Механика. (2001), гл.11.

2. Стрелков С.П. Механика. (4-е изд., 2005), гл.XV, §144-145.

3. Сивухин Д.В. Общий курс физики в 5-ти томах, т. 1, Механика (4-е изд., 2005), гл. X, § 84.

4. Введение в физический практикум.

Примерные контрольные вопросы

1. Выведите уравнение стоячей волны, возникающей в струне.

2. Начертите графики смещения точек в стоячей волне в струне при $n = 2$ и для двух моментов времени, отличающихся на $T/4$, и укажите на них положение узлов и пучностей скорости, деформации, кинетической и потенциальной энергии.

3. Как отличаются амплитуды колебаний точек струны, соответствующие различным значениям n при неизменной силе натяжения? Почему?

4. Почему результаты измерений целесообразно привести в виде графика $(\nu_n/n)^2=f(F)$?

5. Почему вибратор, создающий вынужденные колебания струны целесообразно помещать вблизи закрепленного конца струны?

6. Систематическая или случайная ошибка определяет точность проведенных Вами измерений?

Лабораторная работа № 1.13[1)]

Определение частоты колебаний камертона методом резонанса

Введение

В трубе длиной h, закрытой с одного конца, можно возбудить стоячую звуковую волну с пучностью смещения (и скорости) на открытом конце и узлом этих величин на закрытом (явление акустического резонанса). Длина такой звуковой волны λ_n удовлетворяет условию:

$$h = (2n+1)\,\lambda_n/4, \qquad \text{где } n = 0, 1, 2,\ldots . \tag{1}$$

Этим длинам волн соответствуют резонансные частоты:

$$\nu_n = u/\lambda_n = u\cdot(2n+1)/4h, \tag{2}$$

где $u = u_0\sqrt{\theta/273}$ – скорость звука в условиях эксперимента; u_0=332 м/с – скорость звука в воздухе при 0°С; θ – абсолютная температура в комнате.

В данной работе явление акустического резонанса положено в основу определения частоты колебаний камертона.

Экспериментальные задачи, поставленные в работе:

- изучение явления акустического резонанса;
- определение частоты колебаний камертона.

Описание экспериментальной установки

Экспериментальная установка изображена на рис. 13.1. Звуковые волны, возбуждаемые колеблющимся камертоном **К**, распространяются в воздухе. Стеклянная трубка ***A*** соединена резиновым шлангом с сосудом ***B***, заполненным водой. Если уровень воды в трубке таков, что длина воздушного столба удовлетворяет условию (1), то устанавливается стоячая волна с максимумом смещения на открытом конце трубки ***A***. Уровень воды в трубке можно изменять, передвигая сосуд ***B*** по вертикальным направляющим.

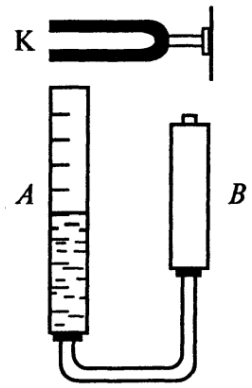

Рис. 13.1

Возбуждая в камертоне (см. рис. 13.1) свободные колебания (с помощью ударов резинового молоточка) и постепенно сначала понижая уровень воды в трубке (начиная с положения, когда уровень почти совпадает с верхним обрезом трубки), а затем, повышая его, отмечают положение уровня воды в тот момент, когда наблюдается наиболее громкое звучание (акустический резонанс).

Рекомендуется определить три последовательных положения резонансного уровня воды, для каждого из которых выполняется условие (1).

Подготовка протокола к работе

(*Выполняется во внеаудиторное время при подготовке к занятию*)

Запишите в лабораторной тетради номер и название работы.

Запишите в тетради заголовок: «***Задание 1. Измерение длины воздушного столба, соответствующего условию резонанса звуковой волны, возбуждаемой камертоном***».

Ознакомьтесь с методикой получения акустического резонанса в столбе воздуха и измерением его высоты.

[1)] Подготовлено преподавателями КОЭФ Александровым В.Н., Васильевой И.А. и Коротаевой Е.А.

Запишите в тетради заголовок: «***Задание 2. Вычисление частоты колебаний камертона***».

Запишите формулы для вычисления частоты колебаний камертона и относительной ошибки этих косвенных измерений ε_ν (см. также **В4** в [3]) Подготовьте табл. 1 для записи результатов измерений и вычислений ***Заданий 1*** и ***2***.

Таб. 1

№ камертона	h_1, м	h_2, м	h_3, м	θ, К	u, м/с	λ, м	$\nu_{рез}$, $с^{-1}$	ε_ν, %
1								
2								

Измерения и обработка результатов

Задание 1

Проведите, в соответствии с изложенной выше методикой, измерение высот h_i воздушного столба, удовлетворяющих условиям резонанса звуковых волн, возбуждаемых последовательно двумя камертонами, и их результаты внесите в табл. 1.

Задание 2

Длину звуковой волны в воздухе можно найти из выражения: $h_3 - h_2 = \lambda_{рез}/2$, где h_2 и h_3 – второй и третий резонансные уровни. Откуда $\nu_{рез} = \nu_{кам} = u/\lambda_{рез}$ (u – скорость звука при измеренной температуре θ в аудитории).

Вычислите частоты колебаний камертонов. Данные измерений θ и вычислений u, λ, $\nu_{рез}$ и ε_ν внесите в таб. 1.

Рекомендуемая литература

1. Гершензон Е.М., Малов Н.Н., Мансуров А.Н. Курс общей физики. Механика. (2001), §10.3, гл. 11.

2. Стрелков С.П. Механика. (4-е изд., 2005), гл.XV.

3. Введение в физический практикум.

Примерные контрольные вопросы

1. Напишите уравнение стоячей волны, возникающей при колебаниях воздушного столба в трубке. Узел или пучность смещения приходится на границу вода – воздух?

2. Начертите график смещения точек от времени в стоячей волне в трубе при $n = 2$ и укажите на нем положение узлов и пучностей скорости точек, деформации, кинетической и потенциальной энергии.

3. Происходит ли передача энергии в стоячей волне? Аргументируйте свой ответ.

4. Начертите графики смещения, скорости точек и деформации от координаты в стоячей волне в трубе для двух моментов времени, отличающихся на четверть периода колебаний – $T/4$.

5. Как происходит движение отдельных частей камертона, после удара по его ножке резиновым молоточком?

Лабораторная работа № 1.14[1)]

Определение скорости звука в воздухе

Введение

Траектория движения материальной точки, участвующая в двух взаимно перпендикулярных колебаний с равными частотами

$$x = x_m \cos(\omega t) \qquad \text{и} \qquad y = y_m \cos(\omega t + \varphi) \tag{1}$$

представляет собой эллипс, уравнение которого имеет вид:

$$\frac{x^2}{x_m^2} + \frac{y^2}{y_m^2} - \frac{2xy}{x_m y_m}\cos\varphi = \sin^2\varphi. \tag{2}$$

Форма эллипса на плоскости (x, y) зависит от разности фаз φ.В частном случае, когда φ = 0, эллипс вырождается в прямую, проходящую в первом и третьем квадрантах. При $\varphi = \pi$ получается прямая, проходящая через второй и четвертый квадранты. При непрерывном изменении разности фаз, форма эллипса также меняется непрерывно, повторяясь при изменении φ на 2π радиан.

Это свойство траектории результирующего колебания положено в основу используемого в работе метода определения скорости распространения звука в воздухе.

В бегущей волне колебания двух точек, находящихся на расстоянии l друг от друга, сдвинуты по фазе на угол

$$\varphi = 2\pi\frac{l}{\lambda} = \frac{2\pi l\nu}{u}, \tag{3}$$

где ν и λ – частота и длина волны; u – скорость распространения волны в упругой среде.

Выражение (3) может быть использовано для экспериментального определения скорости распространения звука в воздухе u по измеренным значениям величин φ, ν и λ.

Экспериментальные задачи, поставленные в работе:

- измерение скорости распространения звука в воздухе методом сложения взаимно перпендикулярных колебаний.

Описание экспериментальной установки

Схема установки изображена на рис. 14.1. Динамик **Г** излучающий звуковые волны, питается от звукового генератора **ЗГ**. Звуковая волна достигает микрофона **М** и порождает в его цепи переменное напряжение, которое поступает на вертикальные отклоняющие пластины

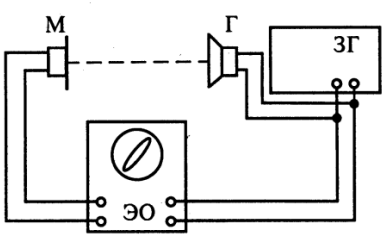

Рис. 14.1.

[1)] Подготовлено преподавателями КОЭФ Александровым В.Н., Васильевой И. А. и Коротаевой Е.А.

осциллографа **ЭО**. Напряжение на горизонтальные пластины подается непосредственно с выходных клемм звукового генератора (см. описание ***лабораторной работы* № 1.4**).

Между переменным напряжением на выходе звукового генератора и напряжением, возникающим в цепи микрофона, существует разность фаз φ, зависящая от взаимного расположения микрофона и динамика. Микрофон и динамик могут свободно передвигаться вдоль измерительной скамьи. При перемещении микрофона по измерительной скамье на расстояние $l=\lambda n$, составляющее целое число волн, разность фаз φ изменяется на $2\pi n$.

Разность фаз φ определяется по форме эллипса на экране осциллографа. Как уже было сказано, при разности фаз $\varphi = 2\pi n$ (n = 0, 1,2, …) эллипс вырождается в прямую, проходящую через первую и третью четверти координатной плоскости, а при $\varphi = \pi\,(2n+1)$ – в прямую, проходящую через второй и четвертый квадранты.

Первоначально динамик и микрофон располагаются у края измерительной скамьи и подают напряжение на звуковой генератор и осциллограф.

Медленно перемещая микрофон к противоположному концу измерительной скамьи, отмечают положение микрофона, при котором на экране осциллографа видна прямая линия. Продолжая передвигать микрофон, считают число n повторных появлений такой же прямой на экране осциллографа.

Каждое последующее повторение первоначальной картины соответствует изменению разности фаз на 2π радиан. Измеряя перемещение микрофона l при n повторениях картины на экране осциллографа, и пользуясь соотношением (1), находят скорость звука u (значение частоты ν отсчитывают по шкале генератора).

Для сравнения полученного результата с табличными данными вычисляют скорость u в условиях опыта, пользуясь соотношением:

$$u = u_0\sqrt{\theta/273}, \qquad (4)$$

где θ – температура воздуха в комнате (в кельвинах), u_0 = 332 м/с – скорость звука при 0°С.

Подготовка протокола к работе

(*Выполняется во внеаудиторное время при подготовке к занятию*)

Запишите в лабораторной тетради номер и название работы.

Запишите в тетради заголовок: «***Задание*. *Измерение скорости распространения звука в воздухе методом сложения взаимно перпендикулярных колебаний***».

Ознакомьтесь с лабораторной установкой и описанной выше методикой выполнения измерений.

Запишите в тетради формулы, используемые в работе, выведите формулу для вычисления относительной ошибки косвенных измерений скорости звука u в воздухе ε_u и подготовьте табл. 1 для записи результатов измерений и вычислений.

Табл. 1

№ измер.	ν, $с^{-1}$	l, м	n	λ, м	θ, К	u, м/с
1						
2						
3						
ε_u = _____ %						

Измерение и обработка результатов

Задание

Соберите электрическую схему установки и предъявите ее для проверки инженеру.

Проведите описанные выше измерения и вычислите скорость распространения звуковых колебаний в воздухе для трех частот (между 1000 и 3000 Гц). Данные измерений и вычислений n, l, λ, ν, u и ε_u внесите в табл. 1.

Разберите установку и сдайте ее инженеру.

Рекомендуемая литература

1. Гершензон Е.М., Малов Н.Н., Мансуров А.Н. Курс общей физики. Механика. (2001), гл. 1, § 1.8 – 1.10, гл. VIII, § 1.1 – 8.8.

2. Иродов И.Е., Механика. Основные законы (11-е изд., 2013), гл. VI, § 6.1.

3. Сивухин Д.В. Общий курс физики в 5-ти томах, т. 1, Механика (4-е изд., 2005), гл. VI, § 39.

4. Введение в физический практикум.

Примерные контрольные вопросы

1. Каков механизм распространения звуковых волн в воздухе?

2. Выведите уравнение кривой, наблюдаемой на экране осциллографа. От какого параметра зависит форма этой кривой? Почему он меняется при перемещении микрофона?

3. Как изменится картинка на экране осциллографа, если на динамик подать сигнал от второго **ЗГ** с частотой в два раза больше (в три раза больше), чем частота сигнала от первого **ЗГ**?

4. Нарисуйте графики зависимости смещения точки, ее скорости и деформации в бегущей волне от координаты для двух моментов времени, отличающихся на $T/4$. Покажите на графике точки, соответствующие максимумам кинетической и потенциальной энергии.

5. От чего зависит точность определения значения скорости звука в предлагаемом опыте? Как повысить точность метода?

6. Опишите принцип действия микрофона и динамика. Почему предлагается проводить эксперимент в узком диапазоне частот **ЗГ**?

Лабораторная работа № 1.15[1)]

Определение длины волны и скорости звука в твердых телах методом резонанса

Введение

При переходе акустических колебаний из одной среды в другую частота колебаний сохраняется, но изменяется длина волны, так как скорость звука зависит от упругих свойств среды. Следствием этого является соотношение:

$$u_1 = u_2 \cdot \lambda_1/\lambda_2, \quad (1)$$

где λ_1, λ_2 - длина волн в средах 1 и 2**,** а u_1 и u_2 – скорости звука в этих средах.

Если второй средой является воздух, то:

$$u_2 = u_0\sqrt{\theta\ /273\text{K}}, \quad (2)$$

где u_0 = 332 м/с - скорость звука в воздухе при нормальных условиях, θ - *абсолютная* температура (в кельвинах - K) воздуха в аудитории во время проведения измерений.

Для определения скорости звука в твердом теле используется прибор Кундта, в котором продольные колебания твердого стержня возбуждают акустические волны в столбе воздуха.

Экспериментальные задачи, поставленные в работе:

- исследование явления акустического резонанса;
- определение скорости звука в твердых телах.

Описание экспериментальной установки

Прибор Кундта (рис. 15.1) состоит из стержня ***B***, один конец которого, снабженный небольшим диском ***D***, помещается в открытый конец стеклянной трубы ***A***, запаянной с другого конца. Середина стержня закреплена с помощью винта ***C***. При возбуждении в стержне продольных колебаний они передаются столбу воздуха.

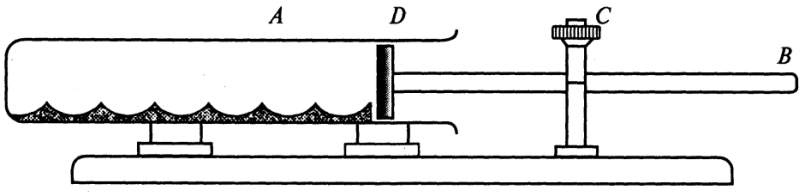

Рис. 15.1.

Изменяя длину воздушного столба (перемещением стержня относительно трубы), можно создать условия, соответствующие акустическому резонансу. В трубе возникает стоячая волна, в результате чего пробковые опилки, первоначально распределенные равномерно по длине трубы, образуют отчетливую периодическую картину, собираясь в местах, соответствующих узлам смещения. При этом собственная частота колебаний стержня совпадает с собственной частотой колебаний столба воздуха.

Длину звуковой волны в воздухе λ_1 можно определить, измерив расстояние между $2k$ узлами стоячей волны (k – целое число).

Длина волны основного тона стержня длиной l равна $\lambda_2 = 2l$.

Измерив λ_1 и λ_2 и используя соотношения (1) и (2), находят скорость распространения волны в твердом теле.

[1)] Подготовлено преподавателями КОЭФ Александровым В.Н., Васильевой И.А. и Коротаевой Е.А.

Подготовка протокола к работе

(*Выполняется во внеаудиторное время при подготовке к занятию*)

Запишите в лабораторной тетради номер и название работы.

Запишите в тетради заголовок: «***Задание. Определение длины волны и скорости звука в твердых телах методом резонанса***».

Запишите формулы для вычисления скорости звука и относительной ошибки этих косвенных измерений ε_u (см. также **В4** в [3]). Подготовьте табл. 1 для записи результатов измерений и вычислений.

Табл. 1

Материал образца	λ_1, м	λ_2, м	θ, К	u, м/с	ε_u, %
Латунь					
Железо					

Измерения и обработка результатов

Собрав установку, возбуждают продольные колебания в стержне из исследуемого материала. Для этого, плотно обхватив свободный конец стержня фланелевой салфеткой с канифолью, энергично сдвигают салфетку от точки крепления стержня к его концу. Постепенно передвигая стеклянную трубку относительно стержня, добиваются отчетливой картины стоячих волн в трубке.

Задание

Произведите необходимые измерения и вычислите скорость звука сначала в воздухе при температуре в аудитории θ, а затем в латуни, железе и дереве. Данные измерений и вычислений λ_1, λ_2, u и относительную ошибку косвенных измерений (см. **В4** в [3]) скорости звука u внесите в табл. 1.

Сравните полученные данные с приведенными в справочнике.

Рекомендуемая литература

1. Гершензон Е.М., Малов Н.Н., Мансуров А.Н. Курс общей физики. Механика. (2001), гл.11.

2. Стрелков С.П. Механика. (4-е изд., 2005), гл.XV, §144-145.

3. Введение в физический практикум.

Примерные контрольные вопросы

1. Нарисуйте графики смещения, скорости точек и деформации при образовании стоячей волны в стержне для произвольного момента времени. Как изменяются эти графики через промежуток времени, равный $T/4$?

2. Какой из стержней, исследуемых в работе, имеет наибольшую частоту основного тона?

3. Каков механизм возбуждения колебаний в стержне?

4. Почему пробковые опилки собираются в местах, соответствующих узлам смещения?

5. Нужно ли изменять положение стержня (см. рис. 14.1) относительно стеклянной трубки ***A*** при смене стержня (для получения отчетливой картины стоячей волны)?

Лабораторная работа № 1.16[1)]

Градуировка звукового генератора методом интерференции

Введение

Если два когерентных источника гармонических колебаний, создающие в упругой среде бегущие волны, накладывающиеся друг на друга, возбуждают в некоторой точке среды колебания одного направления, то в результате интерференции амплитуда результирующего колебания равна:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 cos\frac{2\pi}{\lambda}(l_1 - l_2)}, \qquad (1)$$

где A_1 и A_2 - амплитуды колебаний в данной точке среды, создаваемые каждым источником в отдельности; l_1 и l_2 - расстояния данной точки от первого и второго источников, соответственно; λ - длина распространяющихся в среде волн (предполагается, что источники синфазны).

Амплитуда колебаний точек, для которых разность хода составляет целое число волн $\Delta = l_1 - l_2 = n\lambda$, будет максимальной; амплитуда минимальна там, где $\Delta = (2n+1)\,\lambda/2$ (n = 0, 1, 2,..). Эти соотношения используются в данной работе для определения частоты и длины звуковой волны в воздухе.

Экспериментальные задачи, поставленные в работе:

- исследование явления интерференции звуковых волн в воздухе;
- градуировка звукового генератора методом интерференции.

Описание экспериментальной установки

Источником звуковых волн в опыте является динамик (**Г**) (рис. 16.1), питаемый от звукового генератора (**ЗГ**). Излучаемые динамиком волны распространяются по двум трубам ***a*** и ***b***, которые в начале и конце соединяются в общую трубу. Результирующее колебание, возникающее в конце труб, улавливается микрофоном (**М**). Переменное напряжение с выхода микрофона подводится ко входу Y электронного осциллографа (**Э**). Длину одной из труб ***a*** можно менять. Шкала (**Ш**) и указатель (***У***) позволяют измерить увеличение длины трубы ***a*** по сравнению с длиной трубы ***b***.

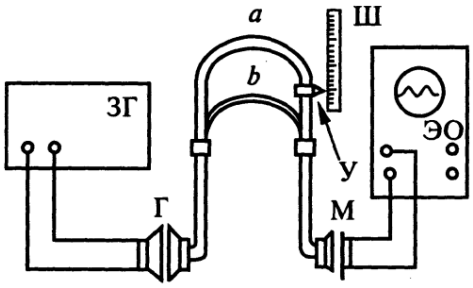

Рис. 16.1.

Звуковые волны, распространяющиеся по трубам ***a*** и ***b*** разной длины, соединяющимся в конце, приобретают некоторую разность хода. Изменяя эту разность хода, можно последовательно создавать условия, при которых амплитуда результирующих колебаний и сигнал на осциллографе принимают максимальное и минимальное значения. При этом разность хода, соответствующая двум соседним максимумам или минимумам интерференционной картины равна λ.

Следует иметь в виду, что перемещение подвижной трубы на отрезок h означает изменение разности хода на $2h$.

[1)] Подготовлено преподавателями КОЭФ Александровым В.Н., Васильевой И.А. и Коротаевой Е.А.

Частоту звуковых волн, а следовательно, и частоту сигнала звукового генератора можно вычислить по формуле: $\nu = \frac{u}{\lambda} = \frac{u_0}{\lambda}\sqrt{\frac{\theta}{273\text{K}}}$, где u - скорость звука в воздухе и θ - *абсолютная* температура воздуха в условиях эксперимента; u_0=332 м/с - скорость звука в воздухе при нормальных условиях θ_0=273 К.

Подготовка протокола к работе

(*Выполняется во внеаудиторное время при подготовке к занятию*)

Запишите в лабораторной тетради номер и название работы.

Запишите в тетради заголовок: «***Задание. Градуировка звукового генератора методом интерференции***».

Запишите формулы для вычисления частоты звукового генератора и относительной ошибки этих косвенных измерений ε_ν (см. также **В4** в [3]) Подготовьте табл. 1 для записи результатов измерений и вычислений.

Табл. 1

№ измерения	α, дел	θ, К	u, м/с	λ, м	ν, Гц	ε_ν, %
1						
5						

Измерения и обработка результатов

Задание. Произвести необходимые измерения для пяти значений частот генератора в интервале 2000–5000 Гц. Данные измерений и вычислений α, h, ν, u, λ и относительной ошибки косвенных измерений (см. **В4** в [4]) частоты ε_ν внесите в табл. 1 (α - деления шкалы (**Ш**)). Для получения возможно более точного значения длины волн в работе рекомендуется определять разность хода, соответствующую условию минимумов.

Рекомендуемая литература

1. Гершензон Е.М., Малов Н.Н., Мансуров А.Н. Курс общей физики. Механика. (2001), гл.11.

2. Стрелков С.П. Механика. (4-е изд., 2005), гл.XV, §141.

3. Сивухин Д.В. Общий курс физики в 5-ти томах, т. 1, Механика (4-е изд., 2005), § 73, 74, 85.

4. Введение в физический практикум.

Примерные контрольные вопросы

1. Какие волны называются когерентными?
2. Каким образом в данной работе создаются когерентные волны?
3. Получите выражение (1).
4. Почему точность измерений длины волны λ при регистрации положений минимумов больше, чем при регистрации положений максимумов?
5. Чем ограничивается точность измерения λ в эксперименте?
6. Опишите принцип действия микрофона и динамика.

Лабораторная работа № 1.17-18[1)]

Экспериментальное определение модуля Юнга и модуля сдвига

Введение

В области упругих деформаций напряжение, возникающее в деформированном теле, пропорционально относительной деформации. В случае продольной деформации образца цилиндрической формы это соотношение (закон Гука) записывается обычно в следующей форме:

$$\sigma = E\varepsilon_{од}, \quad (1)$$

где $\sigma = F/S$ - напряжение, $\varepsilon_{од} = \Delta l/l$ - относительная деформация, E - модуль Юнга материала образца, F – деформирующая сила, l, S - длина и площадь поперечного сечения образца.

Если измерить деформирующую силу и соответствующее ей удлинение образца Δl, то модуль Юнга можно вычислить по формуле:

$$E = \sigma/\varepsilon_{од} = Fl/(S\Delta l) = mgl/(0{,}25\pi d^2\Delta l)\ . \quad (2)$$

При закручивании проволоки в ней возникают деформации сдвига. При малых углах поворота φ эти деформации являются упругими, поэтому момент возвращающих сил пропорционален углу закручивания:

$$M = -k \cdot \varphi. \quad (3)$$

Коэффициент k в этом уравнении зависит от упругих свойств вещества проволоки, характеристикой которых в данном случае является модуль сдвига G. По закону Гука можно найти связь между k и G [1]:

$$k = G\frac{\pi r^4}{2l}, \quad (4)$$

где r - радиус проволоки, l - ее длина.

С учетом (4) уравнение (3) принимает вид:

$$M = -G\frac{\pi r^4}{2l}\varphi. \quad (5)$$

Это соотношение указывает на два возможных метода экспериментального определения модуля сдвига:

статический - путем измерения момента внешних сил (численно равного моменту сил упругости) и соответствующего угла закручивания φ исследуемой проволоки;

динамический - путем измерения периода T крутильных свободных колебаний тела, подвешенного на свободном конце проволоки.

В этом случае уравнение движения будет иметь вид:

$$I\ddot{\varphi} = M,$$

где I - момент инерции маятника. Следовательно:

[1)] Подготовлено преподавателями КОЭФ Александровым В.Н., Васильевой И.А. и Коротаевой Е.А.

$$I\ddot{\varphi} = -G\frac{\pi r^4}{2l}\varphi\,. \qquad (6)$$

Это уравнение описывает гармонические крутильные колебания с периодом:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{G\frac{\pi r^4}{2l}}}\,, \qquad \text{откуда}$$

$$G = \frac{8\pi l}{r^4}\cdot\frac{I}{T^2}\,. \qquad (7)$$

Динамический метод не требует точной аппаратуры для измерения углов и момента сил и находит широкое применение для экспериментального определения модуля сдвига. *Именно этот метод и используется в данной работе*.

Экспериментальные задачи, поставленные в работе:

- экспериментальное определение модуля Юнга материала проволоки методом растяжения;
- экспериментальное определение модуля сдвига материала проволоки методом крутильных колебаний;
- определение абсолютной и относительной ошибок косвенных измерений.

Описание экспериментальных установок

На рис. 17.1 дана схема экспериментальной установки определения модуля Юнга. К верхнему кронштейну *N* крепится калиброванная проволока *K,* модуль упругости материала которой следует определить. На том же кронштейне с помощью нитей *M* подвешена платформа *D* с грузами *P,* перекладывая которые на платформу *C*, нагружают испытуемую проволоку. Таким образом, верхний кронштейн *N* находится в течение эксперимента под постоянным напряжением и его деформация не вносит ошибок при измерении удлинения испытуемой проволоки. Измерение удлинения образца осуществляется с помощью индикатора *B,* закрепленного неподвижно на кронштейне *A*.

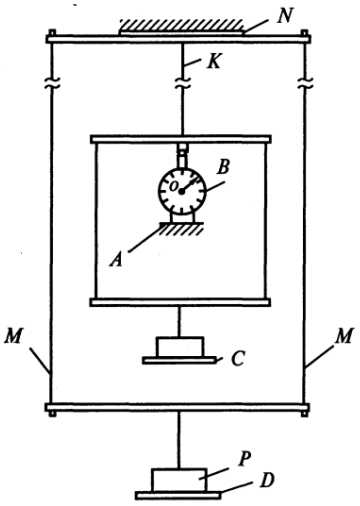

Рис. 17.1.

Для определения модуля сдвига используется крутильный маятник (рис. 17.2), который представляет собой стержень *2*. При помощи небольшого цилиндра *1* маятник подвешен на проволоке *3*, модуль сдвига материала которой определяется в эксперименте. На стержень *2* симметрично надеваются цилиндрические подвижные грузы *4* одинаковой массы *m* и

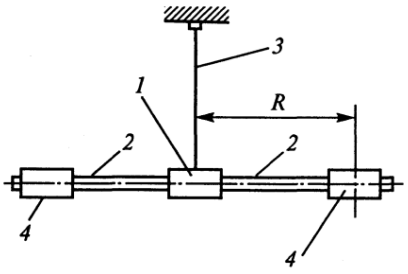

Рис. 17.2.

формы. Различным расположением этих грузов достигается изменение момента инерции маятника относительно оси вращения.

Экспериментальное определение модуля сдвига, как видно из уравнения (4), связано с измерениями длины и радиуса испытуемой проволоки, периода колебаний и момента инерции маятника относительно оси вращения.

Первые три величины могут быть измерены непосредственно. Момент инерции определяется следующим образом. Проводятся измерения периода колебаний маятника для двух различных положений грузов на стержне R_1 и R_2 (на первой трети и на концах стержня). Из условия постоянства отношения I/T^2 для данного маятника следует:

$$\frac{I}{T^2} = \frac{I_1 - I_2}{T_1^2 - T_2^2} = \frac{2m\left(R_1^2 - R_2^2\right)}{T_1^2 - T_2^2}, \qquad (5)$$

где $I_1 = I_0 + 2I_{\text{гр1}}$ – момент инерции прибора относительно оси вращения при положении грузов на расстоянии R_1; $I_2 = I_0 + 2I_{\text{гр2}}$ – момент инерции прибора относительно оси вращения при положении грузов на расстоянии R_2; $I_{\text{гр}}$ - момент инерции груза, рассчитываемый по теореме Штейнера:

$$I_{\text{гр1}} = I_{\text{гр0}} + mR_1^2 \quad \text{или} \quad I_{\text{гр2}} = I_{\text{гр0}} + mR_2^2.$$

Таким образом, уравнение (4) принимает вид:

$$G = \frac{16\pi m\left(R_1^2 - R_2^2\right)l}{\left(T_1^2 - T_2^2\right)r^4}. \qquad (6)$$

В формуле (6) все величины, стоящие в правой части, могут быть измерены экспериментально.

Подготовка протокола к работе

(*Выполняется во внеаудиторное время при подготовке к занятию*)

Запишите в лабораторной тетради номер и название работы.

Запишите в тетради заголовок: «***Задание 1. Экспериментальное определение модуля Юнга материала проволоки методом растяжения***».

Запишите формулы, используемые при выполнении ***Задания 1*** с расшифровкой буквенных обозначений, и табл. 1 для записи результатов измерений и относительной и абсолютной ошибок косвенных измерений модуля Юнга (см. примеры в **В4** [4] и ***Приложение*** в настоящей работе).

Табл. 1

№ измер.	l= _____ м		d= _____ м		S= _____ м^2
	F, Н	5	10	15	20
	σ, Н·м$^{-2}$				
1	$\Delta l \cdot 10^{-5}$, м				
	$\varepsilon_{\text{од}}$				
	Е, Н·м$^{-2}$				

2	$\Delta l \cdot 10^{-5}$, м				
	$\varepsilon_{од}$				
	E, Н·м$^{-2}$				
3	$\Delta l \cdot 10^{-5}$, м				
	$\varepsilon_{од}$				
	E, Н·м$^{-2}$				
$E_{ср}$= _____ Н·м$^{-2}$			Материал проволоки: _____		
ε_E = _____ %			ΔE = _____ Н·м^2		

Оставьте в тетради 0,5 страницы для вспомогательных записей и вычислений.

Запишите в тетради заголовок: «***Задание 2. экспериментальное определение модуля сдвига материала проволоки методом крутильных колебаний***».

Запишите формулы, используемые при выполнении ***Задания 2*** с расшифровкой буквенных обозначений, и табл. 2 для записи результатов измерений и относительной и абсолютной ошибок косвенных измерений модуля сдвига (см. примеры в **В4** [4] и ***Приложение*** в настоящей работе).

Табл. 2

m= _____ ,кг			r= _____ ,м			l= _____ ,м		
R_1, м	t_1, с	T_1, с	R_2, м	t_2, с	T_2, с	G, кг/м с^2	ε_G, %	ΔG, кг/м·с^2
Материал проволоки: _____								

Измерения и обработка результатов

Задание 1

Проволока нагружается гирей массой 1 кг, после чего на индикаторе поворотом внешнего кольца устанавливается нуль отсчета. Затем поочередно перекладывая гири (массой 0,5 кг каждая) на платформу *C*, фиксируют удлинение. По полученным данным строят график в координатах $\{\varepsilon_{од}, \sigma\}$ и вычисляют модуль Юнга. Длина *l* и диаметр *d* проволоки даны в паспорте работы.

Произведите измерения удлинений проволоки при четырех значениях деформирующей силы. Рекомендуется выбрать значения деформирующей силы 5, 10, 15 и 20 Н.

Проделайте измерения три раза. Постройте график зависимости напряжения σ от деформации $\varepsilon_{од}$, нанеся на него все экспериментальные точки, полученные в трех сериях измерений.

Рассчитайте модуль упругости материала проволоки. Пользуясь справочной таблицей, определите, из чего сделана проволока. Вычислите относительную и абсо-

лютную ошибки косвенных измерений (см. **В4** в [4] и ***Приложение*** в настоящей работе) модуля Юнга. Данные измерений и вычислений l, d, S, F, Δl, $\sigma = F/S$, $\varepsilon_{од} = \Delta l/l$, $E = \sigma/\varepsilon_{од}$ и ε_E внесите в табл. 1.

Задание 2

Измерьте длину l и радиус сечения r проволоки, определите абсолютную и относительную ошибки этих прямых измерений и занесите их в тетрадь.

Произведите измерения периода колебаний крутильного маятника при двух различных положениях подвижных грузов и рассчитайте модуль сдвига материала испытуемой проволоки. Рекомендуется для расчета периода T измерять время t, соответствующее 50 колебаниям.

Данные измерений m, R_1, R_2, t_1, t_2, l, r и вычислений T_1, T_2, G и относительной и абсолютной ошибок косвенных измерений модуля сдвига (см. примеры в **В4** [4] и ***Приложение*** в настоящей работе) внесите в табл. 2.

Пользуясь справочной таблицей физических величин, определите материал проволоки.

Приложение

Модуль Юнга вычисляется, используя соотношение (2) и результаты прямых измерений. Тогда из (2) и примеров в **В4** [4] следует, что относительная ошибка косвенных измерений модуля Юнга равна:

$$\varepsilon_E^2 = \varepsilon_m^2 + \varepsilon_g^2 + \varepsilon_l^2 + \varepsilon_\pi^2 + 4\varepsilon_d^2 + \varepsilon_{\Delta l}^2. \qquad (7)$$

Модуль сдвига вычисляется, используя соотношение (6) и результаты прямых измерений. Тогда из (6) и примеров в **В4** [4] следует, что относительная ошибка косвенных измерений модуля сдвига равна:

$$\varepsilon_G^2 = \varepsilon_\pi^2 + \varepsilon_m^2 + \frac{4(\varepsilon_{R_1}^2 + \varepsilon_{R_2}^2)}{(R_1^2 - R_2^2)^2} + \varepsilon_l^2 + \frac{4(T_1^4\varepsilon_{T_1}^2 + T_2^4\varepsilon_{T_2}^2)}{(T_1^2 - T_2^2)^2} + 16\varepsilon_r^2. \qquad (8)$$

<u>Рекомендуемая литература:</u>

1. Гершензон Е.М., Малов Н.Н., Мансуров А.Н. Курс общей физики. Механика» (2001), гл.6.

2. Стрелков С.П. Механика. (4-е изд., 2005), §§81, 84.

3. Сивухин Д.В. Общий курс физики в 5-ти томах, т. 1, Механика (4-е изд., 2005), §§73-80.

4. Введение в физический практикум.

Примерные контрольные вопросы

1. Какие деформации называются упругими? Объясните зависимость напряжения σ от относительной деформации $\varepsilon_{од}$

2. Объясните устройство измерительной части установки.

3. Как изменяется объем образцов при продольном растяжении или сжатии? Что выражает коэффициент Пуассона?

4. Как распределены деформации растяжения или сжатия в однородном цилиндрическом теле, если тело неподвижно? движется с ускорением?

5. Как распределены деформации сжатия, создаваемые силой тяжести, в однородном цилиндрическом теле (сила тяжести параллельна оси цилиндра) если: *а*) оно подвешено за верхний конец к неподвижной опоре; *б*) оно стоит на неподвижной опоре?

6. Как распределены упругие деформации сдвига по длине проволоки в статическом и динамическом случаях?

7. Как должны быть расположены грузы на стержне при двух измерениях, чтобы погрешность эксперимента была минимальной?

8. Чем ограничена амплитуда гармонических колебаний крутильного маятника?

9. Выведите формулы (3) и (5).

Лабораторная работа № 1.20, 22[1)]

Изучение свойств жидкости

Введение

Стационарное течение идеальной жидкости по горизонтальной трубе описывается уравнением Бернулли:

$$p_1 + \frac{\rho \upsilon_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho \upsilon_2^2}{2}, \qquad (1)$$

где ρ – плотность жидкости; p_1, υ_1, p_2, υ_2 – давления и скорости жидкости в двух произвольных сечениях трубки S_1 и S_2. Расход жидкости (то есть объем жидкости - V, протекающей через любое сечение трубки в единицу времени) рассчитывается по формуле:

$$Q_{\text{теор}} = \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\left(\frac{1}{S_1^2} - \frac{1}{S_2^2}\right)\rho}}. \qquad (2)$$

Экспериментальное значение $Q_{экс}$ определяется из соотношения

$$Q_{экс} = V / t. \qquad (2а)$$

В ***Задании 1*** изучается движение воды по горизонтальной трубе переменного сечения. В стационарном режиме при малых скоростях течения воды можно сделать допущение, что весь поток жидкости представляет единую трубку тока. Вода не является идеальной жидкостью, и поэтому экспериментально найденная зависимость расхода воды от перепада давлений ($\Delta p = p_2 - p_1$) будет отличаться от теоретической, заданной уравнением (2). Относительная величина этого отклонения с учетом погрешностей эксперимента позволяет судить о возможности применения уравнения Бернулли к решению конкретных задач с заданным значением допустимых ошибок.

Движения шарика в вязкой среде изучается в ***Задании 2.*** Зависимость скорости такого движения от времени описывается выражением:

$$\upsilon = \frac{2}{9}\frac{g(\rho - \rho_{ж})r^2}{\eta}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \qquad (3)$$

где ρ, $\rho_{ж}$ - плотности шарика и жидкости, r - радиус шарика, g - ускорение свободного падения, η - коэффициент вязкости жидкости, $\tau = \frac{2}{9}\rho\frac{r^2}{\eta}$ - время установления движения.

При $t \to \infty$ (а фактически, когда $t > \tau$) движение становится равномерным. Эта формула справедлива при условиях, когда движение жидкости относительно шарика можно считать ламинарным и сила трения описывается формулой Стокса:

$$\vec{F} = -6\pi r \eta \, \vec{v} \, .$$

[1)] Подготовлено преподавателями КОЭФ Александровым В.Н., Васильевой И.А. и Коротаевой Е.А.

Движение можно считать ламинарным, если число Рейнольдса $Re=\rho_ж \upsilon r/\eta < 10^3$ в методе Стокса коэффициент вязкости жидкости определяется из измерений размера шарика и значения установившейся скорости движения $\upsilon_{уст}$ (см. задачу 4.80 в [5]):

$$\eta = \frac{2}{9}\frac{g(\rho-\rho_{ж})r^2}{\upsilon_{уст}}. \qquad (4)$$

Экспериментальные задачи, поставленные в работе:

- изучение стационарного течения жидкости по трубе переменного сечения;
- определение коэффициента вязкости жидкости методом Стокса;
- определение абсолютной и относительной ошибок косвенных измерений.

Описание экспериментальных установок

Трубка переменного сечения, используемая в ***Задании 1***, изображена на рис. 20.1. Один конец трубки соединен резиновым шлангом с водопроводным краном. Протекающая через трубку вода с помощью другого шланга отводится в раковину или в мерный сосуд. В узком S_2 и широком S_1 сечениях горизонтальной трубки впаяны вертикальные трубки. Разность уровней воды в них при стационарном потоке воды показывает разность давлений воды на стенки горизонтальной трубки в данных сечениях. Верхние концы впаянных трубок соединены вместе резиновым шлангом, который опускается в раковину. Это предотвращает бесконтрольный выброс воды через трубки при слишком большой разности давлений Δp. Скорость течения воды регулируется краном. Расход воды определяется с помощью мерного сосуда.

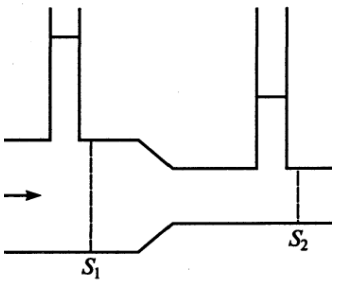

Рис. 20.1.

Экспериментальная установка позволяет производить измерение расхода воды для заданной разности давления $\Delta p = p_2 - p_1$ между двумя фиксированными сечениями трубы. Расход воды определяется из измерений объема воды V, заполняющей мерный сосуд за время Δt.

Схема установки ***Задания 2*** показана на рис. 20.2. Вязкая жидкость (глицерин) налита в цилиндрический сосуд с нанесенными на внешней стороне краской рисками-кольцами, расстояние между которыми измеряют линейкой. Первая риска должна быть нанесена в том месте сосуда, где движение шарика уже устоявшееся и скорость движения не меняется. В качестве шарика используется свинцовая дробь. Время прохождения дробинкой этого расстояния отсчитывается по секундомеру. Радиус шарика измеряют с помощью микрометра. Чтобы при погружении дробинки в жидкость к ней не прилипали пузырьки воздуха, дробинку предварительно следует смочить глицерином.

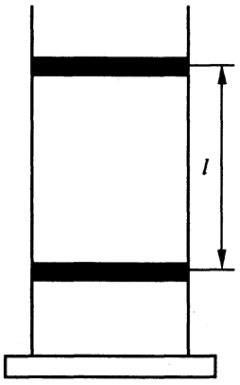

Рис. 20.2.

Подготовка протокола к работе

(*Выполняется во внеаудиторное время при подготовке к занятию*)

Запишите в лабораторной тетради номер и название работы.

Запишите в тетради заголовок: «***Задание 1. Изучение стационарного течения жидкости по трубе переменного сечения***».

Запишите формулы, используемые при выполнении ***Задания 1*** с расшифровкой буквенных обозначений, и табл. 1 и 2 для записи результатов измерений и вычислений Q и ε_Q. Подготовьте лист миллиметровки для построения графика.

Табл. 1.

№ эксп.	Δh, мм вод.ст.	$\Delta p=\rho g \Delta h$,па	Δt, с			$\Delta t_{ср}$, с	V, $\times 10^{-3}$ м^3			$V_{ср}$, $\times 10^{-3}$ м^3

Табл. 2.

№ эксп.	$Q_{эксп}$, $\times 10^{-3}$ м^{3}с$^{-1}$	$Q_{теор}$, $\times 10^{-3}$ м^{3}с$^{-1}$	$\frac{Q_{теор}-Q_{эксп}}{Q_{теор}}$, %	ε_Q, %

Оставьте в тетради место (0,5 стр.) для вспомогательных записей и вычислений и запишите заголовок: «***Задание 2. Определение коэффициента вязкости жидкости методом Стокса***».

Запишите формулы, используемые при выполнении ***Задания 2*** с расшифровкой буквенных обозначений, и табл. 3 для записи результатов измерений.

Табл. 3

r, м	t, с	l, м	τ, с	υ_0,м/с	η, Па с	$\Delta\eta$, Па с	Re
ρ=_____кг/м^3		$\rho_ж$ =_____ кг/м^3		$\eta_{ср}$=_____ Па с		$\Delta\eta_{max}$=____ Па с	

Измерения и обработка результатов

Задание 1

Произведите измерения Q для пяти значений Δp через каждые 20 мм водяного столба (мм в.с.), начиная с Δp =20 мм водяного столба. Следует выполнить не менее трех серий таких измерений. По полученным данным постройте график зависимости $Q_{\text{эксп}} = f\left(\sqrt{\Delta p}\right)$ в координатах $\left\{\sqrt{\Delta p}, Q\right\}$. На тот же график нанесите теоретическую зависимость, полученную по формуле (2), не забыв при вычислениях перевести [мм в.с.] в [Па]. Оцените случайную ошибку измерений. Данные измерений V, Δt, Δp , $V_{\text{ср}}$, $\Delta t_{\text{ср}}$ и вычислений $Q_{\text{эксп}}$, $Q_{\text{теор}}$ и относительной ошибки косвенных измерений (см. примеры в **В4** [4] и ***Приложение*** в настоящей работе) расхода жидкости ε_Q внесите в табл. 1 и табл. 2 для экспериментальных и расчетных данных, соответственно.

Задание 2

Измерьте скорость движения шарика. Проведите 5 опытов, записав в табл. 2: t, l, υ_0, r. Рассчитайте значение η в каждом опыте. Определите среднее значение η и максимальное значение $\Delta\eta$. Значения ρ и $\rho_{\text{ж}}$ возьмите из таблиц. Рассчитайте числа Рейнольдса для двух опытов. Рассчитайте время установления скорости равномерного движения τ для двух опытов. Данные измерений и вычислений внесите в табл. 2.

Вычислите и запишите в тетради относительную ошибку косвенных измерений коэффициента вязкости жидкости (см. примеры в **В4** [4] и ***Приложение*** в настоящей работе).

Приложение

Задание 1

Расход жидкости $Q_{\text{теор}}$ вычисляется по результатам прямых измерений по формуле (2а), то есть косвенным измерением. Тогда, используя примеры в **В4** [4], получим:

$$\varepsilon_{Q_{\text{эксс}}}^2 = \varepsilon_V^2 + \varepsilon_t^2. \qquad (5)$$

Задание 2

Вязкость жидкости вычисляется по результатам прямых измерений по формуле (4), то есть косвенным измерением. Тогда, используя примеры в **В4** [4], получим:

$$\varepsilon_\eta^2 = \varepsilon_g^2 + \frac{\rho^2\varepsilon_\rho^2 + \rho_{\text{ж}}^2\varepsilon_{\rho_{\text{ж}}}^2}{(\rho - \rho_{\text{ж}})^2} + 4\varepsilon_r^2 + \varepsilon_l^2 + \varepsilon_t^2. \qquad (6)$$

<u>Рекомендуемая литература:</u>

1. Гершензон Е.М., Малов Н.Н., Мансуров А.Н. Курс общей физики. Механика» (2001), §7.3-7.6, 10.2-10.6.

2. Стрелков С.П. Механика. (4-е изд., 2005), § 39-40, 100-111.

3. Сивухин Д.В. Общий курс физики в 5-ти томах, т. 1, Механика (4-е изд., 2005), §94,95.

4. Введение в физический практикум.

5. Механика. Задачи и решения. Казанцева А.Б., Каменецкая М.С., др. - М.: КолосС, 2005

Примерные контрольные вопросы

1. Объясните различие между теоретической и полученной вами экспериментальной зависимостью $Q_{\text{эксп}} = f\left(\sqrt{\Delta p}\right)$.

2. Изменятся ли результаты эксперимента, если изменить направление течения?

3. Как измеряются статическое и динамическое давления?

4. Чем определяется случайная ошибка эксперимента? Как повысить точность измерений?

5. Выведите формулы (1) и (2).

6. Запишите уравнение движения шарика в вязкой жидкости. Найдите его решение.

7. Объясните физический смысл числа Рейнольдса.

8. Как изменится характер движения шарика, в условиях, когда $10^3 < Re < 10^4$?

9. Запишите уравнение движения шарика, брошенного вверх с начальной скоростью υ_0, если движение происходит в вязкой жидкости. Найдите его решение.

10. Почему отсчет времени движения шарика ведется не от поверхности жидкости, а от некоторой глубины (обозначенной первым кольцом)? Как оценить эту глубину?