

Лабораторная работа № 1.11¹⁾

Изучение вынужденных колебаний

Введение

В инерциальной системе отсчета вынужденные колебания физического маятника в поле силы тяжести описываются уравнением

$$I_z \frac{d^2\alpha}{dt^2} = M_g + M_r + M_{\text{вын}} \quad (1)$$

где α - угол отклонения маятника от положения равновесия, M_g , M_r и $M_{\text{вын}}$ - соответственно моменты сил тяжести и трения, а также вынуждающей, действующей на маятник, I_z — момент инерции маятника относительно оси вращения Z .

При малых α ($M_g = -mgl\sin\alpha \approx -mgl\alpha = -k\alpha$) и момент сил трения можно считать пропорциональным угловой скорости маятника ($M_r = -r_{\text{тр}} \frac{d\alpha}{dt}$).

Если внешняя (вынуждающая) сила изменяется со временем по гармоническому закону, то уравнение (1) принимает вид:

$$I_z \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -k\alpha - r_{\text{тр}} \frac{d\alpha}{dt} + M_0 \cos \omega t$$

или

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2\beta \frac{d\alpha}{dt} + \omega_0^2 \alpha = \frac{M_0}{I_z} \cos \omega t, \quad (2)$$

где $k = mgl$ – коэффициент момента силы тяжести, возвращающей маятник в положение равновесия, m , l и g - соответственно масса, расстояние от центра масс маятника до оси подвеса и ускорение свободного падения, $r_{\text{тр}}$ – коэффициент трения, $\beta = r_{\text{тр}}/(2I_z)$ – коэффициент затухания, $\omega_0 = \sqrt{k/I_z}$ – угловая частота собственных колебаний маятника, ω угловая частота момента вынуждающей силы, M_0 – амплитуда момента вынуждающей силы.

Движение маятника, описываемое этим уравнением, является сложным. Оно представляет собой сумму вынужденных гармонических колебаний с некоторой угловой амплитудой α_0 и угловой частотой ω и свободных колебаний, затухающих с течением времени и имеющих частоту

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (3)$$

Однако, после переходного процесса, когда свободные колебания затухнут, маятник начнет колебаться по гармоническому закону (стационарный режим) с некоторым сдвигом по фазе φ по отношению к вынуждающему воздействию:

$$\alpha = \alpha_0 \cdot \cos(\omega t - \varphi), \quad (4)$$

где

$$\alpha_0 = \frac{M_0/I_z}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \quad (5)$$

и

$$\text{tg} \varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (5a)$$

¹⁾ Подготовлено преподавателями КОЭФ Александровым В.Н., Васильевой И.А. и Коротаевой Е.А.

В настоящей работе изучаются вынужденные колебания физического маятника с подвижной точкой подвеса.

Экспериментальные задачи, поставленные в работе:

- экспериментальное изучение движения тела в неинерциальной системе отсчета;
- исследование амплитудной и фазовой характеристики вынужденных колебаний;
- определение абсолютной и относительной ошибок косвенных измерений.

Описание экспериментальной установки

Экспериментальная установка представляет собой два маятника. Причем один из них (малый), подвешен в некоторой точке E другого (большого). На рис. 11.1 схематически изображены оба маятника и их взаимное расположение в произвольный момент времени. Они могут совершать колебательное движение в вертикальной плоскости (плоскости рисунка) относительно горизонтальных осей (перпендикулярны плоскости рисунка), проходящих через точку O для большого маятника и точку E для маленького. Большой маятник, состоящий из стержня AB , вдоль которого могут перемещаться массивные грузы D . Перемещение грузов по стержню позволяет изменять период колебаний большого маятника. Угол отклонения от вертикали γ отсчитывается по шкале M . Угловая амплитуда α , установившихся вынужденных колебаний малого маятника, определяется по шкале N .

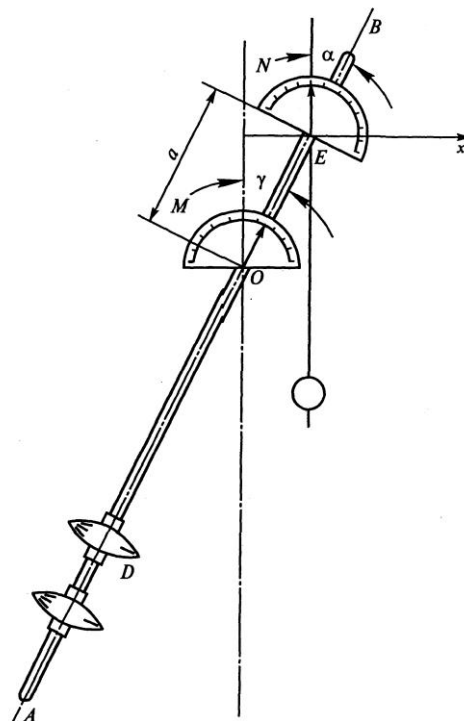


Рис. 11.1.

Как видно из схемы, малый маятник участвует в двух независимых движениях: поступательном вместе с точкой подвеса (при малых колебаниях большого маятника) и колебательном. Это позволяет в дальнейшем рассматривать только колебательное движение, перейдя в систему отсчета, связанную с его точкой подвеса.

Запишем в этой системе уравнение движения малого маятника. При малых колебаниях большого маятника можно считать, что точка подвеса совершает гармонические колебания по прямой X по закону $x=X_0 \cdot \cos(\omega t)$, где X_0 - амплитуда смещения точки подвеса, ω - угловая частота колебаний большого маятника. Следовательно, выбранная система отсчета является неинерциальной, так как она

движется с ускорением $a_{\text{сис}} = -X_0\omega^2 \cos(\omega t)$. Чтобы в такой системе записать уравнение движения малого маятника, нужно кроме действующих сил тяжести и трения учесть силу инерции $F_{\text{ин}}$:

$$F_{\text{ин}} = -m \frac{d^2x}{dt^2} = mX_0\omega^2 \cos \omega t.$$

Эта сила является вынуждающей для колебаний малого маятника и ее максимальный момент относительно центра масс малого маятника – $M_0 = mX_0l\omega^2$, где l – расстояние от точки подвеса малого маятника до его центра масс.

Таким образом, на малый маятник в процессе его движения действуют три силы: сила тяжести, сила трения (пропорциональная скорости) и гармонически изменяющаяся вынуждающая сила инерции, в результате действия которых маятник начинает раскачиваться, то есть приобретает угловое ускорение.

Следовательно, введя те же обозначения, что и в (2), уравнение колебательного движения малого маятника имеет вид:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2\beta \frac{d\alpha}{dt} + \omega_0^2\alpha = \frac{M_0}{I_z} \cos \omega t. \quad (6)$$

Амплитуда этих колебаний и разность фаз момента вынуждающей силы и смещения определяются уравнениями (5).

Конструкция экспериментальной установки дает возможность варьировать частоту вынуждающей силы и, следовательно, позволяет получить экспериментальную зависимость $\alpha_0 = \alpha(\omega)$ (амплитудная характеристика маятника).

Фазовая характеристика колебаний малого маятника ($\varphi = \varphi(\omega)$) может быть рассчитана по формуле (4), а коэффициент затухания β и частота собственных колебаний ω_0 определяются экспериментально.

Подготовка протокола к работе

(Выполняется во внеаудиторное время при подготовке к занятию)

Запишите в лабораторной тетради номер и название работы.

Запишите в тетради заголовок: **«Задание 1. Определение частоты и коэффициента затухания собственных колебаний малого маятника при малом затухании»**.

Запишите формулы, используемые при выполнении **Задания 1** с расшифровкой буквенных обозначений, и табл. 1 для записи результатов измерений. Выведите

формулы для вычисления относительных ошибок определения коэффициента затухания ε_β и угловой частоты свободных колебаний ε_{ω_1} (см. примеры в В4 [5]).

Табл. 1

α_{m_i} , дел.	15	13	11	9	7	5	3
t_i , с	0						
$\alpha_{m_0}/\alpha_{m_i}$							
$N=10, t = \underline{\hspace{2cm}}$ с, $T_1 = \underline{\hspace{2cm}}$ с,	$\alpha_{m_0}/\alpha_{m_\tau} = e = 2,7$ $\omega_1 = \underline{\hspace{2cm}}$ с ⁻¹ ,				$\beta = \underline{\hspace{2cm}}$ с ⁻¹ , $\tau = \underline{\hspace{2cm}}$ с.		
$\varepsilon_{\omega_1} = \underline{\hspace{2cm}}$ %				$\varepsilon_\beta = \underline{\hspace{2cm}}$ %			

Подготовьте два листа миллиметровки для построения графиков и ознакомьтесь с правилами их построения в В7 [5] и в разделе **Построение графика в лабораторной работе № 1.2.**

Оставьте 0,5 стр. для вспомогательных записей и вычислений.

Запишите в тетради заголовок: «**Задание 2. Изучение амплитудной характеристики колебаний малого маятника $\alpha_m = \alpha(\omega)$** ».

Запишите формулы, используемые при выполнении **Задания 2** с расшифровкой буквенных обозначений, и табл. 2 для записи результатов измерений. Подготовьте лист миллиметровки для построения графика.

Табл. 2

Число колебаний маятника – N	10									
Положение грузов	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ω , с ⁻¹										
α_m , дел										
Разность фаз φ , рад										

Оставьте 0,5 стр. для вспомогательных записей и вычислений.

Запишите в тетради заголовок: «**Задание 3. Изучение фазовой характеристики вынужденных колебаний малого маятника**».

Запишите формулы, используемые при выполнении **Задания 3** с расшифровкой буквенных обозначений, и подготовьте лист миллиметровки для построения графика.

Измерение и обработка результатов

Задание 1

Значение коэффициента затухания определяется из графика зависимости амплитуды колебания малого маятника от времени. Аналитически эта зависимость выражается формулой:

$$\alpha(t) = \alpha_{m_0} e^{-\beta t}. \quad (7)$$

За время релаксации $\tau = 1/\beta$ амплитуда уменьшается в e раз ($e \cong 2,7$), то есть $\alpha_{m_\tau} = \alpha_{m_0} / e$ или $\alpha_{m_\tau} / \alpha_{m_0} = 1/e$. Таким образом, зная τ , легко вычислить β .

С другой стороны, из (7) следует, что $\alpha_{m_0} / \alpha(t) = e^{\beta t}$. Тогда, взяв натуральный логарифм этого соотношения, получим: $\ln \frac{\alpha_{m_0}}{\alpha(t)} = \beta t$, то есть линейную зависимость от времени t . Поэтому коэффициент β нужно находить из графиков, построенных в координатах $\left\{ t, \left(\frac{\alpha_{m_0}}{\alpha(t)} \right) \right\}$ или $\left\{ t, \ln \left(\frac{\alpha_{m_0}}{\alpha(t)} \right) \right\}$ (см. **В7** в [5]).

Перед началом измерений рекомендуется повторно ознакомиться с разделами **В5** и **В6** в [5].

Для определения β малого маятника большой маятник устанавливается в нерабочее положение (плоскости призм опираются на подставку). Малому маятнику дается начальное отклонение несколько большее 16 делений шкалы. Секундомер включают, когда амплитуда колебаний становится равной $\alpha_{m_0} = 15$ делениям шкалы, и его останавливают, когда в первом измерении значение амплитуды станет равным $\alpha_{m_1} = 13$ делениям шкалы. В дальнейшем секундомер останавливают, когда амплитуда уменьшается соответственно до 11, 9, 7, 5, 3 делений шкалы. Показания секундомера заносятся в табл. 1. По полученным данным строят график в выбранных координатах и проводят необходимые расчеты.

Для определения угловой частоты свободных колебаний маятника ω_1 измеряют время t десяти (N) полных колебаний маятника и вычисляют период T_1 и частоту ω_1 и заносят их в табл. 1. $\omega_1 = 2\pi N / t$.

Данные измерений α_{m_i} и t_i и вычислений τ , β , T_1 и ω_1 , а также их относительных ошибок косвенных измерений ε_β и ε_{ω_1} [5] занесите в табл. 1.

По результатам измерений вычислите значение собственной угловой частоты малого маятника ω_0 .

Задание 2

Рекомендация: Начинать выполнение **Задания 2** желательно под наблюдением преподавателя или инженера.

Большой маятник устанавливается в рабочее положение путем поворота его на 90° вокруг оси, проходящей вдоль стержня маятника. Необходимо убедиться, что он установлен в нужной плоскости и лезвие призмы заняло положение в

канавке на опорной раме. Предварительно грузы устанавливаются в самом нижнем положении.

Большой маятник отклоняют примерно на 6° (такое начальное отклонение сохраняется при всех измерениях) и измеряют период колебания большого маятника (по времени 10 полных колебаний). После установления вынужденных колебаний (1,5 мин – это время надо выдерживать при всех измерениях), измеряют амплитуду вынужденных колебаний малого маятника и записывают в табл. 2.

Затем маятник приводится в нерабочее положение, и оба груза передвигаются на 2 деления вверх. Приводя маятник в рабочее положение, повторяют измерения до тех пор, пока верхний груз не займет крайнее верхнее положение (последнее измерение). Полученные данные представляются в виде графика в координатах $\{\omega, \alpha_m\}$.

Проведите необходимые измерения и постройте график зависимости амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы. Данные измерений t, α_m и вычислений ω внесите в табл. 2.

Задание 3

Прежде всего, следует убедиться, что при малых частотах смещение малого маятника находится практически в фазе со смещением точки подвеса (в противофазе со смещением нижней части большого маятника). Сдвиг фаз φ в этом случае близок к нулю.

При больших частотах смещение малого маятника практически находится в противофазе со смещением точки подвеса (в фазе со смещением нижней части большого маятника). Сдвиг фаз при этом близок к $\varphi = \pi$. Промежуточные значения вычисляются по формуле (5а), используя результаты предыдущих измерений в **Задании 2**. Вычисления произведите для семи значений частоты: резонансной и по три на восходящей и нисходящей ветвях амплитудной характеристики.

Произведите необходимые вычисления и нанесите в соответствующем масштабе полученные результаты на график амплитудной характеристики (откладывая по оси абсцисс частоту вынуждающей силы ω , а по оси ординат величину сдвига фаз).

Рекомендуемая литература:

1. Гершензон Е.М., Малов Н.Н., Мансуров А.Н. Курс общей физики. Механика» (2001), гл. 8, §10.1-10.3, 11.1-11.5.
2. Савельев И.В. Курс общей физики в 5 томах, т. 1, Механика (5-е изд., 2011), гл. 4, §8.1–8.6, 8.9, 8.11.
3. Иродов И.Е., Механика. Основные законы (11-е изд., 2013), гл. VI, §6.4.
4. Сивухин Д.В. Общий курс физики в 5-ти томах, т. 1, Механика (4-е изд., 2005), §63-66.
5. Введение в физический практикум.

Примерные контрольные вопросы

1. Какие колебания называются вынужденными?
2. Выведите формулы для амплитуды и разности фаз между смещением и вынуждающей силой прямолинейных вынужденных колебаний (для пружинного маятника), возбуждаемых силой, меняющейся по гармоническому закону.
3. В чем состоит явление резонанса? Каково его значение в природе и технике?
4. Какую информацию о колебательной системе можно получить из резонансной кривой? Как меняется резонансная кривая при изменении коэффициента затухания?
5. При каких условиях возникает необходимость рассматривать силы инерции?
6. Какова роль силы трения в оси малого маятника (см. рис. 11.1, ось в т. E) при его вынужденных колебаниях?
7. Покажите, что из (6) и примеров в **В4** [5] следует, что относительная ошибка определения коэффициента затухания ε_β для α_{m_i} – измерения (считая, что величины α_{m_0} и α_{m_i} определяются с абсолютной точностью) равна:
$$\varepsilon_\beta(\alpha_{m_i}) = \varepsilon_{t_i} / \ln(\alpha_{m_0} / \alpha_{m_i}).$$
8. Используя (3) и примеры в **В4** [5], найдите относительную ошибку определения частоты свободных колебаний ε_{ω_1} для α_{m_i} – измерения.