

Лабораторная работа № 1.5¹⁾

Измерение момента инерции велосипедного колеса

Введение

В работе момент инерции тела (велосипедного колеса) определяется двумя методами: методом вращения и методом колебаний.

В первом случае центр масс тела лежит на оси вращения. Колесо приводится во вращение силой натяжения нити, к свободному концу которой подвешен груз m (рис. 5.1). Из уравнения динамики вращательного движения тела относительно неподвижной оси Z следует, что $I_{\text{к}} \cdot \varepsilon_{\text{уг}} = M_z$, и можно вычислить момент инерции колеса $I_{\text{в}}$, если известны угловое ускорение $\varepsilon_{\text{уг}}$ и момент силы натяжения нити M_z . Эти величины можно определить, измерив путь h , пройденный грузом m , и время t :

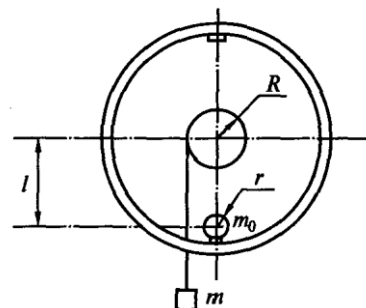


Рис. 5.1.

$$I_{\text{к}} = \frac{M_z}{\varepsilon_{\text{уг}}} = mR^2 \left(\frac{gt^2}{2h} - 1 \right), \quad (1)$$

где

$$\varepsilon_{\text{уг}} = 2h/Rt^2.$$

Формула (1) выведена без учета сил трения. В работе предлагается учесть возникающие при вращении колеса силы трения. Для этого необходимо измерить максимальную массу подвешенного на нити груза $\Delta m_{\text{тр}}$, при которой колесо еще не вращается. Так как в условиях равновесия $\Delta m_{\text{тр}} \cdot g \cdot R = M_{\text{тр}}$, то расчетная формула с учетом сил трения на оси колеса принимает вид:

$$I_{\text{к}} = (m - \Delta m_{\text{тр}}) R^2 \left(\frac{gt^2}{2h} - \frac{m}{m - \Delta m_{\text{тр}}} \right). \quad (2)$$

Во втором случае положение центра масс тела необходимо сместить ниже оси вращения. На внутренней стороне обода колеса симметрично по диаметру имеются два одинаковых небольших гнезда. Помещая в одно из них металлический шарик массой $m_{\text{ш}}$, мы получаем физический маятник, способный колебаться вокруг оси колеса. В этом случае колесо представляет собой физический маятник.

Физическим маятником называется твердое тело, которое может качаться вокруг неподвижной горизонтальной оси. В этом случае положение тела в каждый момент времени можно характеризовать углом его отклонения α от положения равновесия (вертикали – см. рис. 5.1). Тогда уравнение динамики вращательного движения твердого тела можно записать следующим образом:

$$M = I_c \ddot{\alpha} = -m_{\text{ш}} gl \sin \alpha \approx -m_{\text{ш}} g l \alpha. \quad (3)$$

¹⁾ Подготовлено преподавателями КОЭФ Александровым В.Н. Васильевой И.А. и Коротаевой Е.А.

где I_c - момент инерции системы «колесо + шарик» относительно оси колеса, l - расстояние между точкой подвеса и точкой приложения возвращающей силы. Момент возвращающей силы создается силой тяжести шарика, а точка приложения возвращающей силы совпадает с центром масс шарика. Здесь знак минус обусловлен тем, что момент M препятствует увеличению угла α .

Это выражение можно переписать в виде:

$$I_c \ddot{\alpha} + m_{\text{ш}} gl \alpha = 0 \quad \text{или} \quad \ddot{\alpha} + \frac{m_{\text{ш}} gl}{I_c} \alpha = 0.$$

Введя обозначение: $\omega_0 = \sqrt{\frac{m_{\text{ш}} gl}{I_c}}$, получим уравнение:
 $\alpha + \omega_0^2 \alpha = 0.$

Решение этого уравнения известно из кинематики колебательного движения:

$$\alpha = \alpha_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Отсюда следует, что при малых амплитудах колебания физический маятник совершает гармонические колебания с циклической частотой ω_0 и периодом:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I_c}{m_{\text{ш}} gl}} \quad (4)$$

В этом случае момент инерции маятника I_c складывается из момента инерции самого колеса I_k и момента инерции шарика $I_{\text{ш}}$ относительно оси, проходящей через ось вращения колеса. Используя теорему Штейнера легко показать, что:

$$I_{\text{ш}} = 0,4 m_{\text{ш}} r^2 + m_{\text{ш}} l^2, \quad (5)$$

где r – радиус шарика и l – расстояние от центра масс шарика до оси вращения.

Выражение (4) в этом случае преобразуется к виду:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_{\text{ш}} + I_k}{m_{\text{ш}} gl}}, \quad (6)$$

откуда $I_k = \frac{T^2}{4\pi^2} m_{\text{ш}} gl - I_{\text{ш}}.$ (7)

Экспериментальные задачи, поставленные в работе:

- экспериментальное определение момента инерции велосипедного колеса методами вращения и колебаний;
- вычисление абсолютной и относительной ошибок косвенных измерений.

Описание экспериментальной установки

Экспериментальная установка представляет собой велосипедное колесо, способное вращаться вокруг горизонтальной оси (см. рис. 5.1). На шкив колеса намотана нить. К свободному концу нити прикреплена чашечка, в которую вкладывают различные грузы. Измерения времени движения груза производятся с помощью секундомера. Расстояние h , которое проходит груз m определяется линейкой.

Для определения момента инерции колеса методом колебаний следует убрать контейнер для грузов, закрепить нить на шкиве и поместить металлический шарик массой $m_{ш}$ в одно из двух симметричных гнезд. Мы получаем физический маятник, способный колебаться вокруг оси колеса с периодом T (см (6)).

Для определения I_c измеряются период колебания маятника T (с помощью секундомера), масса шарика $m_{ш}$ (на электронных весах), радиус шарика r (штангенциркулем) и расстояние l (линейкой).

Подготовка протокола к работе

(Выполняется во внеаудиторное время при подготовке к занятию)

Запишите в лабораторной тетради номер и название работы.

Запишите в тетради заголовок «**Задание 1. Определение момента инерции колеса методом вращения**».

Запишите в тетради формулы, позволяющие на основе метода вращения определить момент инерции колеса, с расшифровкой всех буквенных обозначений, абсолютные ошибки прямых измерений ΔR , Δm_{Σ} , Δh , Δt и формулы для вычисления абсолютной и относительной ошибок косвенных измерений I_k этим методом (см. примеры в В4 [4] и Приложение в настоящей работе) и подготовьте табл. 1.

Табл. 1

№	R , м	m_{Σ} , кг	h , м	t_i , с	I_k , кг·м ²	\bar{I}_k , кг·м ²	ε_I , %	ΔI_k , кг·м ²	
1									
2									
3									
ΔR , м	Δm_{Σ} , кг	Δh , м	Δt , с	Δg , м/с ⁻²	ε_R , %	ε_m , %	ε_h , %	ε_t , %	ε_g , %

Оставьте половину страницы свободной для черновых записей и вычислений.

Запишите в тетради заголовок «**Задание 2. Определение момента инерции колеса методом колебаний**».

Запишите в тетради формулы, позволяющие на основе метода колебаний определить момент инерции колеса, с расшифровкой всех буквенных обозначений, абсолютные ошибки прямых измерений $\Delta m_{ш}$, $\Delta r_{ш}$, Δl , Δt и формулы для вычисления абсолютной и относительной ошибок косвенных измерений I_k этим методом (см. примеры в В4 [4] и Приложение в настоящей работе) и подготовьте табл. 2.

Табл. 2

$m_{ш}, \text{КГ}$	$r_{ш}, \text{М}$	$l, \text{М}$	$t, \text{С}$	$T, \text{С}$	$I_c, \text{КГ}\cdot\text{М}^2$	$I_{ш}, \text{КГ}\cdot\text{М}^2$	$I_k, \text{КГ}\cdot\text{М}^2$	$\varepsilon_I, \%$	$\Delta I_k, \text{КГ}\cdot\text{М}^2$
$\Delta m_{ш}, \text{Г}$	$\Delta r_{ш}, \text{ММ}$	$\Delta l, \text{М}$	$\Delta T, \text{С}$	$\Delta g, \text{М}\cdot\text{С}^{-2}$	$\varepsilon_{m_{ш}}, \%$	$\varepsilon_r, \%$	$\varepsilon_l, \%$	$\varepsilon_T, \%$	$\varepsilon_g, \%$

Измерения и обработка результатов

Задание 1

Под руководством инженера измерьте величину перегрузка $\Delta m_{тр}$, определяющего величину $M_{тр}$ момента силы трения и запишите это значение в тетрадь.

Измерьте штангенциркулем диаметр шкива в разных местах (не менее трех раз) и найдите среднее значение радиуса шкива R . Взвесьте грузы (не менее двух: m_1 и m_2) и контейнер для грузов ($m_{кон}$) и прикрепите последний к концу нити. Результаты этих прямых измерений и их абсолютные и относительные ошибки занесите в табл. 1.

Для первого измерения вращением колеса поднимите контейнер с грузом суммарной массой $m = m_{\Sigma} = m_1 + m_{кон}$ на заранее отмеренную высоту от пола ($h = 1 \div 1,5$ м) и, отпустив колесо, измерьте время движения груза t (с помощью секундомера) не менее трех раз и вычислите среднее время t_i . Измерения повторите, изменив массу m_{Σ} на $m_2 + m_{кон}$ и $m_1 + m_2 + m_{кон}$. Данные измерений t_i , h , m_{Σ} , Δm_{Σ} , R и вычисления \bar{I}_k и относительной ошибки ε_I (см. примеры в В4 [4] и **Приложение** в настоящей работе) для первого измерения I_k внесите в табл. 1.

Оцените влияние силы трения. Сравните момент силы трения и момент силы натяжения нити. Сделайте вывод. Вычислите момент инерции колеса с учетом сил трения (формула (2)) для первого измерения и сравните его с результатом, полученным по формуле (1).

Задание 2

Снимите груз m с нити. Закрепите нить на шкиве. Возьмите металлический шарик, определите с помощью весов его массу $m_{ш}$ и с помощью штангенциркуля его радиус $r_{ш}$. Положите шарик в одно из гнезд велосипедного колеса и определите с помощью линейки расстояние l от центра шарика до оси колеса. Результаты этих прямых измерений и их абсолютные и относительные ошибки занесите в табл. 2.

Выведите систему «велосипедное колесо и шарик» из положения равновесия, повернув на небольшой угол, и измерьте секундомером время 20 полных колебаний t . Определив период колебаний физического маятника T , рассчитайте момент инерции велосипедного колеса I_k .

Данные вычислений T , I_c , $I_{ш}$, I_k и относительной ошибки ε_I (см. примеры в **В4** [4] и **Приложение** в настоящей работе) внесите в табл. 2.

Сравните значения I_k , полученные двумя методами. Сравните относительные ошибки определения I_k методом колебаний и методом вращения. Объясните полученные результаты.

Приложение

Метод вращения

Момент инерции колеса методом вращения на основе проводимых прямых измерений вычисляется по формуле (1), то есть косвенным измерением. Для вычисления относительной ошибки косвенного измерения I_k воспользуемся соотношением (1). Используя примеры в **В4** [4] и приняв $g = 9,8 \text{ м/с}^2$, можно получить, что относительная и абсолютная ошибки в определении I_k равны, соответственно:

$$\varepsilon_I^2 = \varepsilon_m^2 + 4\varepsilon_R^2 + \varepsilon_g^2 + 4\varepsilon_t^2 + \varepsilon_h^2 \quad \text{и} \quad \Delta I_k = \varepsilon_I \cdot I_k, \quad (8)$$

где ε_i – относительные ошибки соответствующих прямых измерений.

Метод колебаний

Момент инерции колеса методом колебания на основе проводимых прямых измерений вычисляется по формуле (7), то есть косвенным измерением. Так как $I_k \gg I_{ш}$, то для вычисления относительной ошибки косвенного измерения I_k упростим (7), отбросив из него $I_{ш}$. Тогда, используя примеры в **В4** [4] и приняв $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ и $\pi = 3,14$, можно получить, что относительная и абсолютная ошибки в определении I_k равны, соответственно:

$$\varepsilon_I^2 = 4\varepsilon_T^2 + 4\varepsilon_\pi^2 + \varepsilon_m^2 + \varepsilon_g^2 + \varepsilon_l^2 \quad \text{и} \quad \Delta I_k = \varepsilon_I \cdot I_k, \quad (9)$$

где ε_i – относительные ошибки соответствующих прямых измерений.

Рекомендуемая литература:

1. Гершензон Е.М., Малов Н.Н., Мансуров А.Н. Курс общей физики. Механика (2001), гл. 5, § 5.1 – 5.4, гл. X, § 10.1.
2. Савельев И.В. Курс общей физики в 5 томах, т. 1, Механика (5-е изд., 2011), гл.5, §5.1–5.4, гл. 8, § 8.1 – 8.5.
3. Сивухин Д.В. Общий курс физики в 5-ти томах, т. 1, Механика (4-е изд., 2005), гл. V, § 30–36, гл. VI §39, 41.
4. Введение в физический практикум.

Примерные контрольные вопросы

1. Дайте определения момента силы, момента импульса и момента инерции твердого тела относительно неподвижной оси.

2. Сформулируйте основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела.

3. Выведите формулы для расчета момента инерции велосипедного колеса методом вращения (1) и (2).

4. Выведите формулу для расчета момента инерции велосипедного колеса методом колебаний (7) Почему в установке сделаны два симметричных гнезда для шарика?

5. От чего зависит момент инерции твердого тела. Приведите примеры расчета моментов инерции простейших тел: кольца, диска, шара и палочки.

6. При каких условиях можно считать колебания системы «велосипедное колесо + шарик» гармоническими.

7. Выведите формулы для оценки относительной и абсолютной погрешностей определения I_k методом вращения и методом колебания.

8. С какой точностью необходимо взять из таблицы значения π и g при определении I_k методом колебаний и методом вращения?

9. Какой из двух используемых методов (вращения или колебания) дает меньшую погрешность при определении I_k ?

10. Случайная или систематическая ошибка определяет точности измерения I_k в выполненных вами экспериментах?

11. Найдите скорость груза и угловую скорость вращения колеса через время t после начала движения. Получите ответ, исходя из законов динамики и исходя из закона сохранения энергии.

12. Как влияет сила трения на оси колеса на результаты измерения? Нужно ли ее учитывать в данном методе измерения?

13. В каком из двух используемых методов определения I_k можно найти момент силы трения на оси колеса?