

Лабораторная работа № 1.4¹⁾

Сложение гармонических колебаний

Введение

В работе изучается траектория движения и зависимость координаты от времени материальной точки (тела), участвующей одновременно в нескольких колебательных движениях, совершающихся либо вдоль одной прямой, либо во взаимно перпендикулярных направлениях.

1. Сложение гармонических колебаний, совпадающих по частоте и направленным по одной прямой. В этом случае два гармонических колебания различаются амплитудой и начальной фазой:

$$x_1 = a_1 \cos(\omega t) \quad \text{и} \quad x_2 = a_2 \cos(\omega t + \varphi), \quad (1)$$

а закон движения точки имеет вид:

$$x = x_1 + x_2 = a_1 \cos(\omega t) + a_2 \cos(\omega t + \varphi) = a \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (2)$$

$$\text{где} \quad a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos \varphi} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{a_2 \sin \varphi}{a_1 + a_2 \cos \varphi}. \quad (3)$$

2. Сложение взаимно перпендикулярных гармонических колебаний.

Траектория движения материальной точки, участвующей в двух колебаниях одинаковой частоты ($x = x_m \cos(\omega t)$, $y = y_m \cos(\omega t + \varphi)$), происходящих вдоль взаимно перпендикулярных координатных осей, описывается уравнением:

$$\frac{x^2}{x_m^2} + \frac{y^2}{y_m^2} - \frac{2xy}{x_m y_m} \cos \varphi = \sin^2 \varphi. \quad (4)$$

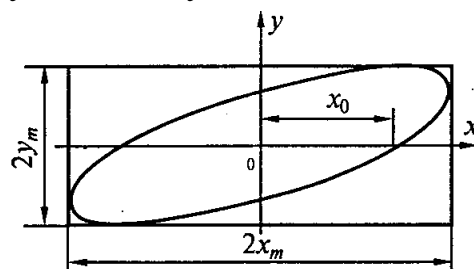


Рис. 4.1.

Материальная точка в этом случае движется по эллипсу, главные оси которого не совпадают с осями координат (рис. 4.1). Как видно из рисунка, траектория точки заключена внутри прямоугольника, стороны которого параллельны осям координат и равны соответственно $2x_m$ и $2y_m$, а центр совпадает с началом координат (положение равновесия колеблющейся точки); разность фаз слагаемых колебаний определяется формулой:

$$\sin \varphi = x_0/x_m, \quad (5)$$

где x_0 – значение координаты x при $y=0$.

Если отношение частот слагаемых колебаний равно целому числу (1, 2, ...), то траектории движения являются замкнутыми линиями и носят название фигур Лиссажу. Вид этих фигур зависит от отношений ω_1/ω_2 , x_m/y_m и начальной разности фаз φ колебаний, частный случай которых эллипс приведен на рис. 4.1.

Изучение траектории движения тела, участвующего одновременно в двух колебательных движениях, в работе проводится как на электрической модели,

¹⁾ Подготовлено преподавателями КОЭФ Александровым В.Н., Васильевой И.А. и Коротаевой Е.А.

при наблюдении движения следа электронного луча на экране осциллографа, так и на механической модели (движение песочного маятника).

Экспериментальные задачи, поставленные в работе:

- определение амплитуды и фазы колебательного движения тела, участвующего в двух колебаниях одного направления;
- изучение формы траектории материальной точки, участвующей в двух взаимно перпендикулярных колебаниях;
- определение разности фаз складываемых колебаний из вида траектории результирующего движения;
- вычисление абсолютной и относительной ошибок косвенных измерений.

Описание экспериментальных установок

1. В **Задании 1** для наблюдения траектории результирующего колебания при сложении двух взаимно перпендикулярных колебаний можно использовать механическую установку, основным элементом которой является песочный маятник.

Песочный маятник – массивное тело с воронкой для песка, подвешенное на двух нитях к раме (рис. 4.5). Приблизительно такой маятник можно считать математическим, способным колебаться в направлении, перпендикулярном плоскости (рамы), в которой расположены нити подвеса в состоянии равновесия. Длина нитей этого «большого» маятника регулируется с помощью винта *K*.

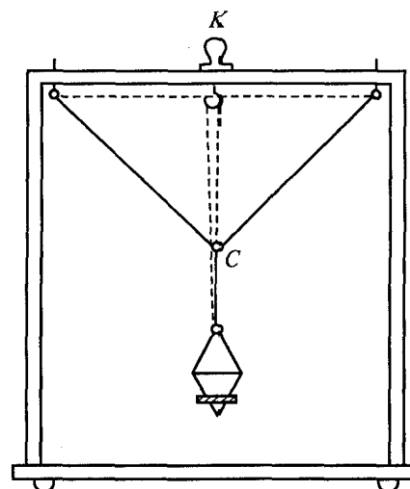


Рис. 4.2.

Для получения колебаний маятника в плоскости нитей (рамы) последние соединяются муфтой в точке *C*. Муфту можно перемещать по высоте, изменяя таким образом период колебаний второго («малого») маятника. В воронку маятника помещается песок, который через узкое отверстие в дне воронки может высыпаться на подложенную под маятник бумагу. Длина маятников измеряется линейкой и численно равна расстоянию по вертикали от горизонтальной линии, проходящей через точки подвеса соответствующих маятников до винтов крепления конуса воронки (заштрихованный прямоугольник на рис. 4.2).

Если сообщить маятникам колебания в двух взаимно перпендикулярных направлениях, то высыпавшийся песок образует на листе бумаги след – кривую, соответствующую траектории движения маятника.

Изменяя соотношение периодов складываемых колебаний, можно наблюдать различные фигуры Лиссажу.

2. Экспериментальная установка **Задания 2** для наблюдения траектории результирующего колебания при сложении двух взаимно перпендикулярных колебаний состоит из осциллографа **С1-1** (рис. 4.3) и двух генераторов электрических гармонических колебаний **ГЗ-118** (рис. 4.4). Если два гармонических

электрических сигнала подать от двух генераторов на горизонтальный (X) и вертикальный (Y) входы осциллографа, то на экране трубки ((1) рис. 4.3) можно наблюдать фигуры Лиссажу, одна из которых приведена на рис. 4.1. Для их наблюдения выход одного генератора подключают кабелем к входу X осциллографа, а другого – к его входу Y. Изменяя частоту и амплитуду сигналов генераторов, на экране осциллографа наблюдают различные фигуры Лиссажу.



Рис. 4.3.



Рис. 4.4.

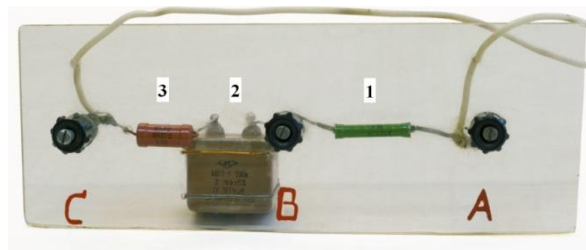


Рис. 4.5.

3. В экспериментальную установку **Задания 3** для изучения сложения гармонических колебаний одного направления входят осциллограф C1-1 (рис. 4.3) и электрическая схема (рис. 4.5), состоящая из последовательно соединенных двух сопротивлений (1) и (3) и конденсатора (2).

Пониженное напряжение городской сети подается от источника (на рис. не приведен) на клеммы AC электрической цепи. Разности потенциалов между точками AB, BC, AC меняются по гармоническому закону:

$$U_{AB} = U_1 \cos(\omega t); U_{BC} = U_2 \cos(\omega t + \varphi_{12});$$

$$U_{AC} = U_{AB} + U_{BC} = U_1 \cos(\omega t) + U_2 \cos(\omega t + \varphi_{12}) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_{10}). \quad (6)$$

Разность фаз φ возникает из-за наличия емкости на участке BC.

Если вертикальный вход осциллографа (вход Y: клеммы (15) и (16) на рис. 4.4) подключать попеременно к участкам цепи AB, BC и AC, то вертикальное смещение луча на экране осциллографа будет пропорционально соответственно разности потенциалов U_{AB} , U_{BC} , $U_{AC} = U_{AB} + U_{BC}$, и на экране будут наблюдаться соответствующие синусоиды. Благодаря специальной электронной схеме в осциллографе, называемой «блоком синхронизации развертки», на экране эти синусоиды будут неподвижными. Поэтому будет наблюдаться смещение синусоид по горизонтальной оси X, соответствующее сдвигу фаз между складываемыми колебаниями, который может быть рассчитан с учетом того, что за период сдвиг фаз составляет 2π радиан.

Работа электрической схемы на рис. 4.5 будет объяснена позднее в разделе «Электричество» курса физики. Настоящий опыт посвящен построению векторной диаграммы сложения двух гармонических колебаний одинаковых частот и одного направления на основе полученных экспериментальных результатов. На рис. 4.6 приведен пример такой векторной диаграммы.

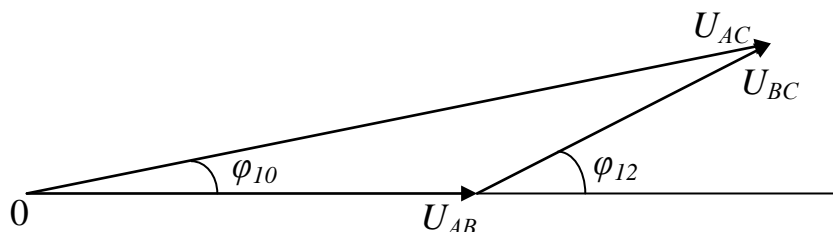


Рис. 4.6.

Подготовка протокола к работе

(Выполняется во внеаудиторное время при подготовке к занятию)

Запишите в лабораторной тетради номер и название работы.

Запишите в тетради заголовок «**Задания 1. Наблюдение траектории движения песочного маятника при колебаниях во взаимно перпендикулярных направлениях**».

Запишите в тетради формулы: описывающих движение точки при колебаниях во взаимно перпендикулярных направлениях, позволяющих определить угол φ и абсолютную и относительную ошибки косвенных измерений этого угла (см. **В4** [4] и **Приложение** к настоящей работе).

Подготовьте табл. 1, 2 и 3.

Табл. 1

Направление колебания	$T, \text{с}$	Амплитуда, м	$\sin\varphi$	Разность фаз φ , рад	$\Delta\varphi$, рад	ε_φ
x						
y						

Табл. 2

Колебания в плоскости рамы		Колебания в плоскости, перпендикулярной раме	
Длина маятника l_1 , м	T_1 , с	Длина маятника l_2 , м	T_2 , с

Табл. 3

№ измер.	Соотнош. длин	N (кол-во колеб.)	t , с	T , с
1. По оси X	1:1	10		По оси X: _____ с
2. По оси Y		10		По оси Y: _____ с
3. По оси X	1:4	10		По оси X: _____ с
4. По оси Y		10		По оси Y: _____ с

Оставьте полстраницы пустыми для черновых записей и вычислений.

Запишите в тетради название «**Задания 2. Сложение двух взаимно перпендикулярных колебаний с помощью осциллографа**».

Повторно ознакомьтесь с выполнением **Задания 2 лабораторной работы 1.1**.

Подготовьте кальку для зарисовки осциллограмм, табл. 4 для зарисовки получаемых кривых для отношений частот слагаемых колебаний: 1:1, 1:2, 2:1, 1:3 и 2:3 и оставьте в тетради место для вспомогательных записей.

Табл. 4

№	Отношение частот	Картинка на экране осциллографа
1	1:1	
2	1:2	
...		

Запишите в тетради заголовок «**Задания 3. Сложение гармонических колебаний, одинаковых по частоте и направлению**» (Выполняется по указанию преподавателя).

Запишите формулы (6) с расшифровкой буквенных обозначений исследуемых колебаний и подготовьте кальку для зарисовки осциллограмм и табл. 5 в тетради для записи результатов измерений.

Табл. 5

U_1 , мм	U_2 , мм	φ_{12} , рад	$U_0^{\text{изм}}$, мм	$\varphi_{10}^{\text{изм}}$, рад	$U_0^{\text{рас}}$, мм	$\varphi_{10}^{\text{рас}}$, рад

Измерения и обработка результатов

Задание 1

Опыт 1. (знакомство с работой экспериментальной установки).

Поднимите муфту на нитях маятника и закрепите ее на крючке перекладки (при этом периоды слагаемых колебаний будут одинаковы) так, чтобы низ конуса воронки находился на высоте 2 – 3 см над столом. С помощью линейки измерьте длину маятника от точки подвеса до винтов крепления конуса воронки.

Положите на основание рамы лист бумаги, отметьте на нем проекцию неподвижного маятника и через эту точку проведите оси координат (в плоскости рамы (ось Y) и перпендикулярно к ней (ось X).

Отведите маятник (воронку) на ≈ 10 см от начала координат и, отпустив его, измерьте с помощью секундомера время его десяти колебаний t_{10} и вычислите

период колебаний маятника. Секундомер рекомендуется включать не ранее начала второго колебания. Запишите результаты этих измерений в тетради.

Опыт 2 («песочный осциллограф», выполняется под наблюдением инженера). Отведите маятник (с песком) в сторону в плоскости рамы и в начале второго периода начните равномерно двигать лист бумаги перпендикулярно плоскости рамы, чтобы получить песочный след нескольких периодов колебаний.

Обведите карандашом полученный след, выберете лучший записанный период, который получен при равномерном движении бумаги, и определите по нему амплитуду колебания (в см) и среднюю скорость движения бумаги и запишите их в тетради.

Опыт 3. Отведите маятник (с песком) в сторону в произвольном направлении, но не вдоль осей и отпустите, сообщив ему небольшой дополнительный импульс в направлении x или y .

Получите на листе бумаги траекторию (песочный след) результирующего движения за несколько периодов. Обведите карандашом полученную кривую, определите амплитуды, разность фаз и запишите уравнения слагаемых колебаний.

Данные измерений и вычислений T , x_m , y_m , φ , $\Delta\varphi$ и ε_φ занесите в табл. 1.

Опыт 4. Рассчитайте, при каком соотношении длин маятников отношение периодов их колебаний будет равно 2. Поместите муфту на нитях в положение, удовлетворяющее найденному условию. Проверьте правильность выбранного положения муфты непосредственным измерением периодов колебаний маятника в плоскости рамы T_1 и в направлении, перпендикулярном плоскости рам, T_2 . Данные измерений и вычислений l_1 , l_2 , T_1 , T_2 занесите в табл. 2.

Опыт 5. Отклонив маятник (с песком) в сторону, но не вдоль осей, приведите его в движение, сообщив первоначальный толчок в первом случае в направлении оси X , а во втором случае в направлении оси Y . Зарисуйте фигуры, образованные песком на листе бумаги за несколько периодов в табл. 3.

Все рисунки, полученные в процессе выполнения работы, сохраните в протоколе работы для защиты полученных результатов.

Задание 2

Включите два звуковых генератора и осциллограф. Отключите блок генератора развертки осциллографа, поставив переключатель (11) в положение «ВЫКЛ», и в центре его экрана должна появиться светящаяся точка.

С помощью кабеля подайте на его вход X напряжение от звукового генератора 1 (разъем (7) на рис. 4.4) на частоте ≈ 200 Гц (частота регулируется ручками (3), (4), (5) и (11) на рис. 4.4). На экране осциллографа должна появиться горизонтальная линия. Ручками (9) генератора и осциллографа добейтесь того, чтобы длина этой линии составляла 6 – 7 см.

Временно отключите осциллограф от генератора 1 (отключив провод кабеля от клеммы (7) осциллографа) и другим кабелем подайте на его вход Y напряжение от звукового генератора 2 на частоте ≈ 200 Гц. На экране осциллографа должна появиться вертикальная линия. Ручками (9) генератора и (14) и (17) осциллографа добейтесь того, чтобы длина этой линии составляла 4 – 6 см.

Подключите кабель от генератора 1 к входу X осциллографа. Плавно изменяя частоту выходного напряжения звукового генератора 2, получите на экране осциллографа фигуры, соответствующие отношениям частот слагаемых колебаний: 1:1, 1:2, 2:1, 1:3 и 2:3. Зарисуйте наблюдаемые фигуры в табл. 4.

Задание 3 (Выполняется по указанию преподавателя)

Подсоедините провода электрической схемы (рис. 4.4) к клеммам источника пониженного напряжения городской сети (на рис.4.4 не показан).

Соедините вертикальный вход («Y») осциллографа (клеммы (15) и (16) на рис. 4.4) с участком цепи AB (точка A соединяется с клеммой «земля» осциллографа (15)).

Ручку «синхронизация» (6) поставьте в положении «от сети». Ручками «диапазоны частот» (11), «частота плавно» (12) и «амплитуда синхронизации» (13) установите на экране осциллографа устойчивую картину, соответствующую одному периоду колебаний (рис. 4.6).

Подберите положение ручек «усиление» по входам X (9) и Y (14) таким образом, чтобы амплитуда смещения электронного луча на экране осциллографа не превышала 30 мм. При всех дальнейших измерениях положения всех ручек на панели должны оставаться неизменными.

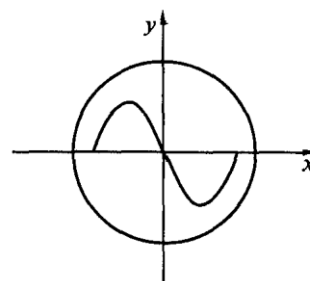


Рис. 4.6.

Зарисуйте полученную кривую на кальке, отметив положение горизонтальной и вертикальной осей по координатной сетке экрана осциллографа. Измерьте амплитуду колебаний U_1 (в мм) и запишите ее в табл. 5.

Соедините далее вход Y осциллографа с участком цепи BC (клемму B соедините с клеммой «земля» (15) осциллографа). Зарисуйте на той же кальке вторую кривую, не смещая положения горизонтальной и вертикальной осей относительно координатной сетки осциллографа.

По смещению максимума второй кривой вдоль горизонтальной оси вычислите сдвиг фазы φ_{12} второго колебания относительно первого. Измерьте амплитуду колебания U_2 (в мм) и запишите ее численное значение, а также величину сдвига фазы φ_{12} в табл. 5. Постройте векторную диаграмму (см. рис. 4.5) и найдите амплитуду $U_0^{\text{рас}}$ и начальную фазу $\varphi_{10}^{\text{рас}}$ суммарного колебания.

Для проверки этого результата соедините вход Y осциллографа с участком цепи AC (клемму A соедините с клеммой «земля» (15)). Зарисуйте на кальке третью синусоиду.

Измерьте амплитуду этого суммарного колебания $U_0^{\text{изм}}$ (в мм) и вычислите сдвиг его фазы $\varphi_{10}^{\text{изм}}$ относительно первого колебания. Сравните полученные значения с рассчитанными по векторной диаграмме. Данные измерений и вычислений амплитуд и фаз колебаний внесите в табл. 5.

Отключите схему (рис. 4.4) от источника тока и осциллографа.

Для нахождения угла φ в **Задании 1 Опыт 3** используются экспериментальные результаты, полученные в этом задании и подставленные в формулу (5). Так как $\varphi = \arcsin(x_0/x_m)$, то можно показать (см. **В4** [4]), что относительная и абсолютная ошибки определения φ равна, соответственно:

$$\varepsilon_{\varphi}^2 = \left(\frac{tg \varphi}{\varphi}\right)^2 \cdot (\varepsilon_{x_0}^2 + \varepsilon_{x_m}^2) \quad \text{и} \quad \Delta\varphi = \varphi \cdot \varepsilon_{\varphi}. \quad (7)$$

Здесь ε_{x_0} и ε_{x_m} – относительные ошибки измерения x_0 и x_m , соответственно.

Рекомендуемая литература:

1. Гершензон Е.М., Малов Н.Н., Мансуров А.Н. Курс общей физики. «Механика» (2001), гл. 1, § 1.8 – 1.10, гл. VIII, § 1.1 – 8.8.
2. Иродов И.Е., Механика. Основные законы (11-е изд., 2013), гл. VI, § 6.1.
3. Сивухин Д.В. Общий курс физики в 5-ти томах, т. 1, Механика (4-е изд., 2005), гл. VI, § 39.
4. Введение в физический практикум.

Примерные контрольные вопросы

1. Выведите формулы (2) и (3) при помощи метода векторных диаграмм.
2. Можно ли при выполнении **Задания 3** поставить ручку «синхронизация» на панели осциллографа в положение «внутр.»?
3. Выведите уравнение траектории движения материальной точки (4), совершающей колебания в двух взаимно перпендикулярных направлениях, если $\omega_1/\omega_2 = 1$ и разность фаз колебаний φ . Рассмотрите частные случаи $\varphi = 0$, $\varphi = \pi/2$.
4. По результатам выполнения **Задания 1** определите кинематические параметры движения воронки по эллиптической траектории: скорость, нормальное и тангенциальное ускорения, полное ускорение, радиус кривизны в различных точках траектории. Запишите уравнение траектории в параметрическом виде.
5. Как по виду фигур Лиссажу определить соотношение частот слагаемых колебаний?
6. Выведите уравнение траектории движения материальной точки (4), совершающей колебания в двух взаимно перпендикулярных направлениях, если $\omega_1/\omega_2 = 2$ и разность фаз колебаний φ . Рассмотрите частные случаи $\varphi = 0$, $\varphi = \pi/2$.
7. Вычислите абсолютную и относительную ошибки косвенных измерений φ (см. В4 в [4] и пример в работе 1.1) в **Задании 1**.