

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1.11<sup>1)</sup> ИЗУЧЕНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

*Цель работы:* экспериментальное изучение движения тела в неинерциальной системе отсчета; исследование амплитудной и фазовой характеристики вынужденных колебаний.

*Литература:* 1. Гершензон Е.М., Малов Н.Н., Мансуров А.Н. Курс общей физики. Механика» (2001), гл. 8, §10.1-10.3, 11.1-11.5.

2. Савельев И.В. Курс общей физики в 5 томах, т. 1, Механика (5-е изд., 2011), гл. 4, §8.1–8.6, 8.9, 8.11.

3. Иродов И.Е., Механика. Основные законы (6-е изд., 2003), гл. VI, §6.4.

4. Сивухин Д.В. Общий курс физики в 5-ти томах, т. 1, Механика (4-е изд., 2005), §63-66.

5. Введение в физический практикум.

*Приборы и принадлежности:* экспериментальная установка, секундомер, лупа.

### ВВЕДЕНИЕ

В инерциальной системе отсчета вынужденные колебания физического маятника в поле силы тяжести описываются уравнением

$$I_z \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = M_g + M_r + M_{\text{вын}} \quad (1)$$

где  $\alpha$  - угол отклонения маятника от положения равновесия,  $M_g$ ,  $M_r$  и  $M_{\text{вын}}$  - соответственно моменты сил тяжести и трения, а также вынуждающей, действующей на маятник,  $I_z$  — момент инерции маятника относительно оси вращения  $Z$ .

При малых  $\alpha$  ( $M_g = -mgl \sin \alpha \approx -mgl \alpha = -k\alpha$ ) и момент сил трения можно считать пропорциональным угловой скорости маятника ( $M_r = -r_{\text{мп}} \frac{d\alpha}{dt}$ ).

Если внешняя (вынуждающая) сила изменяется со временем по гармоническому закону, то уравнение (1) принимает вид:

$$I_z \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -k\alpha - r_{\text{мп}} \frac{d\alpha}{dt} + M_0 \cos \omega t$$

или

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + 2\beta \frac{d\alpha}{dt} + \omega_0^2 \alpha = \frac{M_0}{I_z} \cos \omega t, \quad (2)$$

где  $k = mgl$  - коэффициент момента силы тяжести, возвращающей маятник в положение равновесия,  $m$ ,  $l$  и  $g$  - соответственно масса, расстояние от центра масс маятника до оси подвеса и ускорение свободного падения,  $r_{\text{мп}}$  - коэффициент трения,  $\beta = r_{\text{мп}}/(2I_z)$  — коэффициент затухания,  $\omega_0 = \sqrt{k/I_z}$  —

---

<sup>1)</sup> Описание исправлено и дополнено преподавателями КОЭФ Александровым В.Н. и Васильевой И.А.

угловая частота собственных колебаний маятника,  $\omega$  угловая частота момента вынуждающей силы,  $M_0$  — амплитуда момента вынуждающей силы.

Движение маятника, описываемое этим уравнением, является сложным. Оно представляет собой сумму вынужденных гармонических колебаний с некоторой угловой амплитудой  $\alpha_0$  и угловой частотой  $\omega$  и свободных колебаний (с частотой свободных колебаний -  $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ ), затухающих с течением времени. Однако, после переходного процесса, когда свободные колебания затухнут, маятник начнет колебаться по гармоническому закону (стационарный режим) с некоторым сдвигом по фазе  $\varphi$  по отношению к вынуждающему воздействию:

$$\alpha = \alpha_0 \cos(\omega t - \varphi), \quad (3)$$

где

$$\alpha_0 = \frac{M_0}{I_z \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \quad (4)$$

и

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (4a)$$

В настоящей работе изучаются вынужденные колебания физического маятника с подвижной точкой подвеса.

## ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ УСТАНОВКИ

Экспериментальная установка представляет собой два маятника. Причем один из них (малый), подвешен в некоторой точке  $E$  другого (большого). На рис. 1.11.1 схематически изображены оба маятника и их взаимное расположение в произвольный момент времени. Они могут совершать колебательное движение в вертикальной плоскости (плоскости рисунка) относительно горизонтальных осей (перпендикулярны плоскости рисунка), проходящих через точку  $O$  для большого маятника и точку  $E$  для маленького. Большой маятник, состоящий из стержня  $AB$ , вдоль которого могут перемещаться массивные грузы  $D$ . Перемещение грузов по стержню позволяет изменять период колебаний

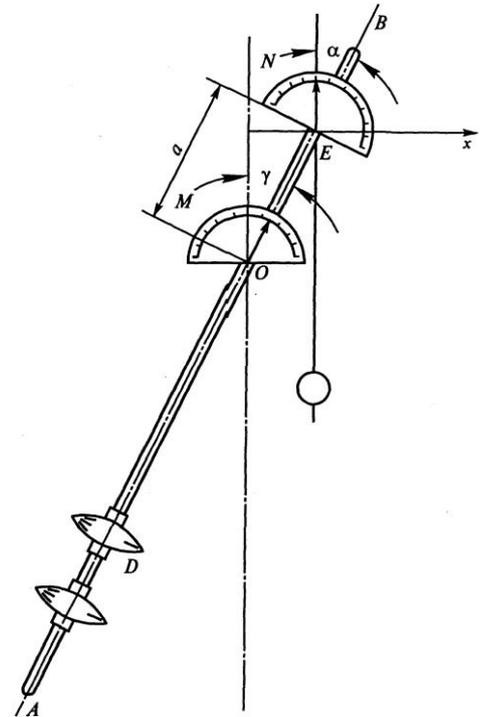


Рис. 1.11.1

большого маятника. Угол отклонения от вертикали  $\gamma$  отсчитывается по шкале  $M$ . Угловая амплитуда  $\alpha$ , установившихся вынужденных колебаний малого маятника, определяется по шкале  $N$ .

Как видно из схемы, малый маятник участвует в двух независимых движениях: поступательном вместе с точкой подвеса (при малых колебаниях большого маятника) и колебательном, что позволяет в дальнейшем рассматривать только колебательное движение, перейдя в систему отсчета, связанную с его точкой подвеса.

Запишем в этой системе уравнение движения малого маятника. При малых колебаниях большого маятника можно считать, что точка подвеса совершает гармонические колебания по прямой  $X$  по закону  $x=X_0\cos(\omega t)$ , где  $X_0$  - амплитуда смещения точки подвеса,  $\omega$  - угловая частота колебаний большого маятника. Следовательно, выбранная система отсчета является неинерциальной, так как движется с ускорением  $a_{\text{сис}} = -X_0\omega^2\cos(\omega t)$ . Чтобы в такой системе записать уравнение движения малого маятника, нужно кроме действующих сил тяжести и трения учесть силу инерции  $F_{\text{ин}}$ :

$$F_{\text{ин}} = -m \frac{d^2x}{dt^2} = mX_0\omega^2 \cos\omega t .$$

Эта сила является вынуждающей для колебаний малого маятника и ее максимальный момент относительно центра масс малого маятника -  $M_0 = mX_0l\omega^2$ , где  $l$  - расстояние от точки подвеса малого маятника до его центра масс.

Таким образом, на малый маятник в процессе его движения действуют три силы: сила тяжести, сила трения (пропорциональная скорости) и гармонически изменяющаяся вынуждающая сила, в результате действия которых маятник начинает раскачиваться, то есть приобретает угловое ускорение.

Следовательно, введя те же обозначения, что и в (2), уравнение колебательного движения малого маятника имеет вид:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2\beta \frac{d\alpha}{dt} + \omega_0^2\alpha = \frac{M_0}{I_z} \cos\omega t . \quad (5)$$

Амплитуда этих колебаний и разность фаз момента вынуждающей силы и смещения определяются уравнениями (4).

Конструкция экспериментальной установки дает возможность варьировать частоту вынуждающей силы и, следовательно, позволяет получить экспериментальную зависимость  $\alpha_0 = \alpha(\omega)$  (амплитудная характеристика маятника).

Фазовая характеристика колебаний малого маятника ( $\varphi = \varphi(\omega)$ ) может быть рассчитана по формуле (4), а коэффициент затухания  $\beta$  и частота собственных колебаний  $\omega_0$  определяются экспериментально.

## ИЗМЕРЕНИЕ И ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ

### Задание 1. Определение частоты и коэффициента затухания собственных колебаний малого маятника.

Значение коэффициента затухания определяется из графика зависимости амплитуды колебания малого маятника от времени. Аналитически эта зависимость выражается формулой:

$$\alpha(t) = \alpha_{m0} e^{-\beta t}. \quad (6)$$

За время релаксации  $\tau = 1/\beta$  амплитуда уменьшается в  $e$  раз ( $e \approx 2,7$ ), то есть  $\alpha_{m\tau} = \alpha_{m0}/e$  или  $\alpha_{m\tau}/\alpha_{m0} = 1/e$ . Таким образом, зная  $\tau$ , легко вычислить  $\beta$ .

С другой стороны, из (6) следует, что  $\alpha_{m0}/\alpha(t) = e^{\beta t}$ . Тогда, взяв натуральный логарифм этого соотношения, получим:  $\ln \frac{\alpha_{m0}}{\alpha(t)} = \beta t$ , то есть линейную зависимость от времени  $t$ . Поэтому коэффициент  $\beta$  нужно находить из графиков, построенных в координатах  $\left\{t, \frac{\alpha_{m0}}{\alpha(t)}\right\}$  или  $\left\{t, \ln \left[\frac{\alpha_{m0}}{\alpha(t)}\right]\right\}$  (см. В7 в [5]).

Перед началом измерений рекомендуется повторно ознакомиться с разделами В5 и В6 в [5].

Для определения  $\beta$  малого маятника большой маятник устанавливается в нерабочее положение (плоскости призм опираются на подставку). Измерения проводятся шесть раз при одинаковых начальных условиях. Малому маятнику дается начальное отклонение несколько большее 16 делений шкалы. Секундомер включают, когда амплитуда колебаний становится равной  $\alpha_{m0} = 15$  делениям шкалы, и его останавливают, когда в первом измерении значение амплитуды станет равным  $\alpha_{m1} = 13$  делениям шкалы. В дальнейшем секундомер останавливают, когда амплитуда уменьшается соответственно до 11, 9, 7, 5, 3 делений шкалы. Показания секундомера заносятся в таблицу 1. По полученным данным строят график в выбранных координатах и проводят необходимые расчеты.

Для определения угловой частоты свободных колебаний маятника  $\omega_1$  измеряют время  $t$  десяти полных колебаний маятника и вычисляют период  $T_1$  и частоту  $\omega_1$  и заносят их в таблицу 1.

Данные измерений  $\alpha_{mi}$ , и  $t_i$  и вычислений  $\tau$ ,  $\beta$ ,  $T_1$  и  $\omega_1$ , а также их относительных ошибок косвенных измерений  $\varepsilon_\beta$  и  $\varepsilon_\omega$  [1] занесите в таблицу 1.

Таблица 1

$\alpha_{mi}$ , дел.	15	13	11	9	7	5	3
$t_i$ , с	0						
$\alpha_{m0}/\alpha_{mi}$							
N=10, $t =$ _____ с, $T_1 =$ _____ с,			$\alpha_{m0}/\alpha_{m\tau} = e = 2,7$ $\omega_1 =$ _____ с <sup>-1</sup> ,			$\beta =$ _____ с <sup>-1</sup> , $\tau =$ _____ с.	
$\varepsilon_\omega =$ _____ %				$\varepsilon_\beta =$ _____ %			

По результатам измерений вычислите значение собственной угловой частоты малого маятника  $\omega_0$ .

**Задание 2. Изучение амплитудной характеристики колебаний малого маятника  $\alpha_m = \alpha(\omega)$ .**

**Рекомендация:** Начинать выполнение задания 2 желательно под наблюдением преподавателя или инженера.

Большой маятник устанавливается в рабочее положение путем поворота его на  $90^\circ$  вокруг оси, проходящей вдоль стержня маятника. Необходимо убедиться, что он установлен в нужной плоскости и лезвие призмы заняло положение в канавке на опорной раме. Предварительно грузы устанавливаются в самом нижнем положении. Большой маятник отклоняют примерно на  $6^\circ$  (такое начальное отклонение сохраняется при всех измерениях) и измеряют период колебания большого маятника (по времени 10 полных колебаний). После установления вынужденных колебаний (1,5 мин - это время надо выдерживать при всех измерениях), измеряют амплитуду вынужденных колебаний малого маятника и записывают в таблицу 2. Затем маятник приводится в нерабочее положение, и оба груза передвигаются на 2 деления вверх. Приводя маятник в рабочее положение, повторяют измерения до тех пор, пока верхний груз не займет крайнее верхнее положение (последнее измерение). Полученные данные представляются в виде графика в координатах  $(\alpha_m, \omega)$ .

Проведите необходимые измерения и постройте график зависимости амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы. Данные измерений  $t$ ,  $\alpha_m$  и вычислений  $\omega$  внесите в таблицу 2.

Таблица 2

Число колебаний маятника	10									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Положение грузов										
$\omega, c^{-1}$										
$\alpha_m, \text{дел}$										
Разность фаз $\varphi, \text{рад}$										

**Задание 3. Изучение фазовой характеристики вынужденных колебаний малого маятника.**

Прежде всего, следует убедиться, что при малых частотах смещение малого маятника находится практически в фазе со смещением точки подвеса (в противофазе со смещением нижней части большого маятника). Сдвиг фаз в этом случае близок к нулю.

При больших частотах смещение малого маятника практически находится в противофазе со смещением точки подвеса (в фазе со смещением нижней части большого маятника). Сдвиг фаз при этом близок к  $-\pi$ . Промежуточные значения вычисляются по формуле (4а), используя результаты предыдущих измерений. Вычисления произведите для семи значений частоты: резонансной и по три на восходящей и нисходящей ветвях амплитудной характеристики.

Произведите необходимые вычисления и нанесите в соответствующем масштабе полученные результаты на график амплитудной характеристики (откладывая по оси ординат величину сдвига фаз).

## ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Какие колебания называются вынужденными?
2. Выведите формулы для амплитуды и разности фаз между смещением и вынуждающей силой прямолинейных вынужденных колебаний, возбуждаемых силой, меняющейся по гармоническому закону.
3. В чем состоит явление резонанса? Каково его значение в природе и технике?
4. Какую информацию о колебательной системе можно получить из резонансной кривой? Как меняется резонансная кривая при изменении коэффициента затухания?
5. При каких условиях возникает необходимость рассматривать силы инерции?
6. Какова роль силы трения в оси малого маятника (см. рис. 1.11.1, ось в т. *E*) в его вынужденных колебаниях?