

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1.4<sup>1)</sup> СЛОЖЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

*Цель работы:* определение амплитуды и фазы колебательного движения тела, участвующего в двух колебаниях одного направления; изучение формы траектории материальной точки, участвующей в двух взаимно перпендикулярных колебаниях; определение разности фаз складываемых колебаний из вида траектории результирующего движения.

*Литература:* 1. Гершензон Е.М., Малов Н.Н., Мансуров А.Н. Курс общей физики. Механика» (2001), гл. 1, § 1.8 – 1.10, гл. VIII, § 1.1 – 8.8.

2. Иродов И.Е., Механика. Основные законы (6-е изд., 2003), гл. VI, § 6.1.

3. Сивухин Д.В. Общий курс физики в 5-ти томах, т. 1, Механика (4-е изд., 2005), гл. VI, § 39.

4. Введение в физический практикум.

*Приборы и принадлежности:* песочный маятник, секундомер, линейка, лист бумаги, песок, осциллограф, два звуковых генератора, электрическая цепь, источник пониженного напряжения городской сети.

### ВВЕДЕНИЕ

В работе изучается траектория движения и зависимость координаты от времени тела, участвующего одновременно в нескольких колебательных движениях, совершающихся либо вдоль одной прямой, либо во взаимно перпендикулярных направлениях.

1. Сложение гармонических колебаний, совпадающих по частоте и направленных по одной прямой. В этом случае два гармонических колебания различаются амплитудой и начальной фазой:

$$x_1 = a_1 \cos(\omega t) \quad \text{и} \quad x_2 = a_2 \cos(\omega t + \varphi),$$

а закон движения точки имеет вид:

$$x = x_1 + x_2 = a_1 \cos(\omega t) + a_2 \cos(\omega t + \varphi) = a \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (1)$$

где 
$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos \varphi} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{a_2 \sin \varphi}{a_1 + a_2 \cos \varphi}.$$

2. Сложение взаимно перпендикулярных гармонических колебаний.

Траектория движения материальной точки, участвующей в двух колебаниях одинаковой частоты ( $x = x_m \cos(\omega t)$ ,  $y = y_m \cos(\omega t + \varphi)$ ), происходящих вдоль взаимно перпендикулярных координатных осей, описывается уравнением:

$$\frac{x^2}{x_m^2} + \frac{y^2}{y_m^2} - \frac{2xy}{x_m y_m} \cos \varphi = \sin^2 \varphi. \quad (3)$$

Материальная точка в этом случае движется по эллипсу, главные оси которого не совпадают с осями координат (рис. 1.4.1). Как видно из рисунка, траектория

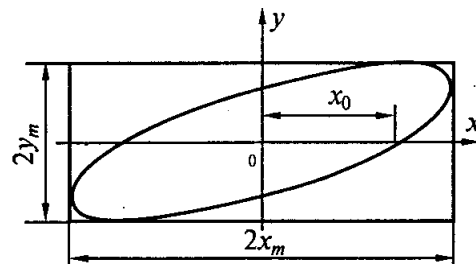


Рис. 1.4.1

<sup>1)</sup> Описание исправлено и дополнено преподавателями КОЭФ Александровым В.Н. и Васильевой И.А.

точки заключена внутри прямоугольника, стороны которого параллельны осям координат и равны соответственно  $2x_m$  и  $2y_m$ , а центр совпадает с началом координат (положение равновесия колеблющейся точки); разность фаз слагаемых колебаний определяется формулой  $\sin\varphi = x_0/x_m$ , где  $x_0$  – значение координаты  $x$  при  $y=0$ .

Если отношение частот слагаемых колебаний равно целому числу (1, 2, ...), то траектории движения являются замкнутыми линиями и носят название фигур Лиссажу. Вид этих фигур зависит от отношений  $\omega_1/\omega_2$ ,  $x_m/y_m$  и начальной разности фаз  $\varphi$  колебаний, частный случай которых эллипс приведен на Рис.1.4.1.

Изучение траектории движения тела, участвующего одновременно в двух колебательных движениях, в работе проводится как на электрической модели, при наблюдении движения следа электронного луча на экране осциллографа, так и на механической модели (движение песочного маятника).

### ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ УСТАНОВКИ

1. На рисунке 1.4.2 приведена электрическая схема для изучения сложения гармонических колебаний одного направления, состоящая из последовательно соединенных двух сопротивлений (1) и (3) и конденсатора (2). Пониженное напряжение городской сети подается от источника (на рис. не приведен) на клеммы  $AC$  электрической цепи. Разности потенциалов между точками  $AB$ ,  $BC$ ,  $AC$  меняются по гармоническому закону:

$$U_{AB} = U_1 \cos(\omega t); U_{BC} = U_2 \cos(\omega t + \varphi); U_{AC} = U_{AB} + U_{BC} = U_1 \cos(\omega t) + U_2 \cos(\omega t + \varphi).$$

Разность фаз  $\varphi$  возникает из-за наличия емкости на участке  $BC$ .

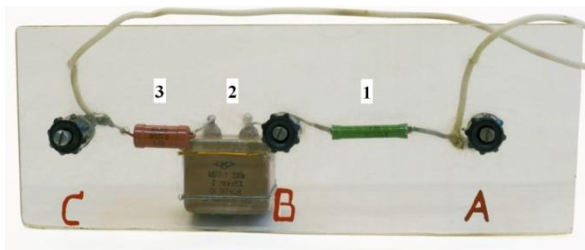


Рис. 1.4.2



Рис.1.4.3



Рис.1.4.4

Если вертикальный вход осциллографа (вход Y: клеммы (15) и (16) на рис. 1.4.4) подключать попеременно к участкам цепи  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$ , то вер-

тикальное смещение луча на экране осциллографа будет пропорционально соответственно разности потенциалов  $U_{AB}$ ,  $U_{BC}$ ,  $U_{AC} = U_{AB} + U_{BC}$ , и на экране будут наблюдаться соответствующие синусоиды. Благодаря специальной электронной схеме в осциллографе, называемой «блоком синхронизации развертки», на экране эти синусоиды будут неподвижными. Но будет наблюдаться смещение синусоид по горизонтальной оси  $X$ , что будет соответствовать сдвигу фаз между ними, который может быть рассчитан с учетом того, что за период сдвиг фаз составляет  $2\pi$  радиан.

2. Если два гармонических электрических сигнала подать от двух генераторов (см. рис. 1.4.3) на горизонтальный ( $X$ ) и вертикальный ( $Y$ ) входы осциллографа, то на экране трубки ((1) рис. 1.4.4) можно наблюдать фигуры Лиссажу, одна из которых приведена на рис. 1.4.1. Для их наблюдения выход одного генератора подключают кабелем к входу  $X$  осциллографа, а другого – к его входу  $Y$ . Изменяя частоту и амплитуду сигналов генераторов, на экране осциллографа наблюдают различные фигуры Лиссажу.

3. Для наблюдения траектории результирующего колебания при сложении двух взаимно перпендикулярных колебаний можно использовать механическую установку, основным элементом которой является песочный маятник.

Песочный маятник – массивное тело с воронкой для песка, подвешенное на двух нитях к раме (рис. 1.4.3). Приблизительно такой маятник можно считать математическим, способным колебаться в направлении, перпендикулярном плоскости (рамы), в которой расположены нити подвеса в состоянии равновесия. Длина нитей регулируется с помощью винта  $K$ .

Для получения колебаний маятника в плоскости нитей последние соединяются муфтой в точке  $C$ . Муфту можно перемещать по высоте, изменяя таким образом период колебаний маятника. В воронку маятника помещается песок, который через узкое отверстие в дне воронки может высыпаться на подложенную под маятник бумагу.

Если сообщить маятнику колебания в двух взаимно перпендикулярных направлениях, то высыпавшийся песок образует на листе бумаги след – кривую, соответствующую траектории движения маятника.

Изменяя соотношение периодов складываемых колебаний, можно наблюдать различные фигуры Лиссажу.

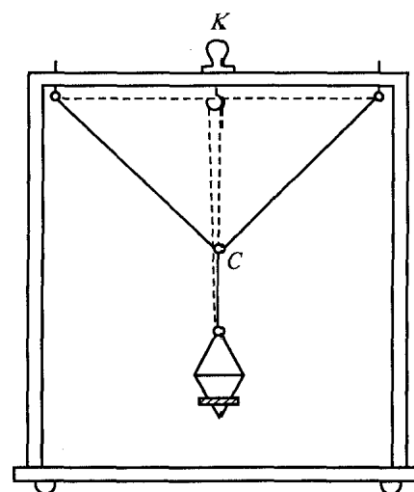


Рис.1.4.5

## ИЗМЕРЕНИЯ И ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ

**Задание 1. Сложение гармонических колебаний, одинаковых по частоте и направлению.**

Подсоедините провода электрической схемы (рис. 1.4.2) к клеммам источника пониженного напряжения городской сети.

Соедините вертикальный вход («Y») осциллографа (клеммы (15) и (16) на рис. 1.4.4) с участком цепи *AB* (точка *A* соединяется с клеммой «земля» осциллографа (15)). Ручку «синхронизация» (6) поставьте в положении «от сети». Ручками «диапазоны частот» (11), «частота плавно» (12) и «амплитуда синхронизации» (13) установите на экране осциллографа устойчивую картину, соответствующую одному периоду колебаний (рис. 1.4.5). Подберите положение ручек «усиление» по входам X (9) и

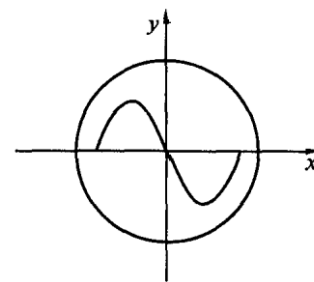


Рис.1.4.5

Y (14) таким образом, чтобы амплитуда смещения электронного луча на экране осциллографа не превышала 3 см. При всех дальнейших измерениях положения всех ручек на панели должны оставаться неизменными. Зарисуйте полученную кривую на кальке, отметив положение горизонтальной и вертикальной осей по координатной сетке экрана осциллографа.

Соедините далее вход Y осциллографа с участком цепи *BC* (клемму *B* соедините с клеммой «земля» (15) осциллографа). Зарисуйте на той же кальке вторую кривую, не смещая положения горизонтальной и вертикальной осей относительно координатной сетки осциллографа. По смещению максимума второй кривой вдоль горизонтальной оси вычислите сдвиг фазы второго колебания относительно первого. Измерьте амплитуды обоих колебаний (в см). Постройте векторную диаграмму и найдите амплитуду и начальную фазу суммарного колебания. Для проверки этого результата соедините вход Y осциллографа с участком цепи *AC* (клемму *A* соедините с клеммой «земля» (15)). Зарисуйте на кальке третью синусоиду. Измерьте амплитуду этого суммарного колебания и вычислите сдвиг его фазы относительно первого колебания. Сравните полученные значения с рассчитанными по векторной диаграмме. Данные измерений и вычислений амплитуд и фаз колебаний внесите в таблицу.

Отключите схему (рис. 1.4.2) от источника тока и осциллографа.

## Задание 2. Сложение двух взаимно перпендикулярных колебаний с помощью осциллографа.

Включите два звуковых генератора. Отключите блок синхронизации развертки осциллографа, поставив переключатель (6) в положение «ВЫКЛ.», и в центре его экрана должна появиться светящаяся точка. С помощью кабеля подайте на его вход X напряжение от звукового генератора 1 (разъем (8) на рис. 1.4.3) на частоте  $\approx 200$  Гц (частота регулируется ручками (3), (4), (5) и (11) на рис. 1.4.3). На экране осциллографа должна появиться горизонтальная линия. Ручками (9) генератора и осциллографа добейтесь того, чтобы длина этой линии составляла 6 – 7 см. Временно отключите осциллограф от генератора 1 (отключив провод кабеля от клеммы (7) осциллографа) и другим кабелем подайте на его вход Y напряжение от звукового генератора 2 на частоте  $\approx 200$  Гц. На экране осциллографа должна

появится вертикальная линия. Ручками (9) генератора и (14) и (17) осциллографа добейтесь того, чтобы длина этой линии составляла 6 – 7 см. Подключите кабель от генератора 1 к входу X осциллографа. Плавно изменяя частоту выходного напряжения звукового генератора 2, получите на экране осциллографа фигуры, соответствующие отношениям частот слагаемых колебаний: 1:1, 1:2, 2:1, 1:3 и 2:3. Зарисуйте наблюдаемые фигуры.

### Задание 3. Наблюдение траектории движения песочного маятника при колебаниях во взаимно перпендикулярных направлениях.

Поднимите муфту на нитях маятника и закрепите ее на крючке перекладки (при этом периоды слагаемых колебаний будут одинаковы). С помощью секундомера определите период колебаний маятника  $T$ . Положите на основание рамы лист бумаги, отметьте на нем проекцию неподвижного маятника и через эту точку проведите оси координат (в плоскости рамы и перпендикулярно к ней). Отведите маятник в сторону в произвольном направлении и отпустите, сообщив ему небольшой дополнительный импульс в направлении  $x$  или  $y$ . Не рекомендуется поднимать воронку над основанием рамы выше чем на 2 – 3 см.

Получите на листе бумаги траекторию результирующего движения за один период. Обведите карандашом полученную кривую, определите амплитуды, разность фаз и запишите уравнения слагаемых колебаний. Данные измерений и вычислений  $T$ ,  $x_m$ ,  $y_m$  и  $\varphi$  занесите в таблицу 1.

Таблица 1

Направление колебания	$T$ , с	Амплитуда, м	Разность фаз $\varphi$ , рад	Уравнение колебаний
$x$				
$y$				

Рассчитайте, при каком соотношении длин маятников отношение периодов их колебаний будет равно 2. Поместите муфту на нитях в положение, удовлетворяющее найденному условию. Проверьте правильность выбранного положения муфты непосредственным измерением периодов колебаний маятника в плоскости рамы  $T_1$  и в направлении, перпендикулярном плоскости рам,  $T_2$ . Данные измерений и вычислений  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $T_1$ ,  $T_2$  занесите в таблицу 2.

Таблица 2

Колебания в плоскости рамы		Колебания в плоскости, перпендикулярной раме.	
Длина маятника $l_1$ , м	$T_1$ , с	Длина маятника $l_2$ , м	$T_2$ , с

Отклонив маятник в сторону, приведите его в движение, сообщив первоначальный толчок в первом случае в направлении оси X, а во втором

случае в направлении оси  $Y$ . Зарисуйте фигуры, образованные песком на листе бумаги за один период.

Все рисунки, полученные в процессе выполнения работы, сохраните в протоколе работы для защиты полученных результатов.

## ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Выведите формулы (1) и (2) при помощи метода векторных диаграмм и прямым расчетом.

2. Можно ли при выполнении задания 1 поставить ручку «синхронизация» на панели осциллографа в положение «внутр.»?

3. Выведите уравнение траектории движения материальной точки (3), совершающей колебания в двух взаимно перпендикулярных направлениях, если  $\omega_1/\omega_2=1$  и разность фаз колебаний  $\varphi$ . Рассмотрите частные случаи  $\varphi=0$ ,  $\varphi=\pi/2$ .

4. По результатам выполнения задания 3 определите кинематические параметры движения воронки по эллиптической траектории: скорость, нормальное и тангенциальное ускорения, полное ускорение, радиус кривизны в различных точках траектории. Запишите уравнение траектории в параметрическом виде.

5. Как по виду фигур Лиссажу определить соотношение частот слагаемых колебаний?

6. Выведите уравнение траектории точки, совершающей колебания в двух взаимно перпендикулярных направлениях, если  $\omega_1/\omega_2=1$  и  $\varphi=0$ .

7. Вычислите относительную ошибку косвенных измерений  $\varphi$  (см. В4 в [4] и пример в работе 1.1) в задании 3.