ВВЕДЕНИЕ В ФИЗИЧЕСКИЙ ПРАКТИКУМ[1)]

В1. ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Задачей физического эксперимента является определение числового значения искомых (измеряемых) физических величин с заданной точностью. Эта задача решается с помощью либо прямых, либо косвенных измерений.

При прямом измерении осуществляется количественное сравнение физической величины с соответствующим эталоном при помощи измерительных приборов. Отсчет по шкале прибора указывает непосредственно измеряемое значение. Например, вольтметр дает значения измеряемого напряжения, а линейка – значение длины.

При косвенных измерениях интересующая нас физическая величина $A=f(x_i,y_i,z_i)$ находится при помощи математических операций над непосредственно измеренными физическими величинами, то есть, проведя прямые измерения каких-либо величины $(x_i,\ y_i,\ z_i)$, мы находим искомое значение A путем вычислений по теоретическим формулам.

Например, сопротивление резистора R можно найти следующим образом (см. Рис. В.1): измерить силу тока I в резисторе амперметром и поданное на него напряжение U (вольтметром), а затем рассчитать R по формуле, полученной из закона Ома: $R = U / I$.

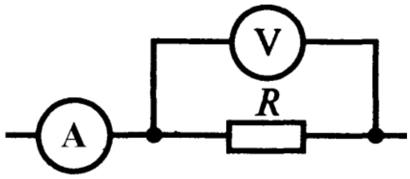

Рис.В1

Точность прямых измерений некоторой величины x оценивается величиной **погрешности** или **ошибки измерений**. Различают абсолютную Δx и относительную ε_x погрешности измерений. **Абсолютная погрешность** Δx (подробнее см. (18) в разделе В3) имеет размерность измеряемой физической величины x, а результат измерений с указанием абсолютной погрешности записывается в виде:

$$x = \bar{x} \pm \Delta x,$$

где $\bar{x}$ – число, равное обычно среднему арифметическому значению n измерений искомой величины x или «среднее по выборке» (подробнее см. (4) в разделе В3):

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\ .$$

Относительная погрешность ε_x, которую часто используют для сравнения точности различных методов измерения, определяется как

$$\varepsilon_x = \pm\frac{\Delta x}{\bar{x}}\cdot$$

Она является безразмерной величиной, и обычно выражается в процентах.

Из приведенного примера следует, что для нахождения точности определения величины сопротивления R необходимо сначала найти ошибки прямых измерений тока и напряжения, и на основе этого вычислить ошибку косвенных измерений величины сопротивления. Поэтому рассмотрим сначала порядок определения ошибок прямых измерений, а затем вычисление ошибок косвенных измерений (см. в разделе В4).

[1)] Введение исправлено и дополнено преподавателями КОЭФ Александровым В.Н. и Васильевой И.А.

В2. ВИДЫ ОШИБОК ПРЯМЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Ошибки прямых измерений физических величин принято подразделять на *систематические, случайные* и *промахи.*

2.1. Систематические ошибки.

Отличительным признаком систематической ошибки является то, что она практически одинакова при фиксированных условиях опыта, то есть во всех измерениях, проводимых одним и тем же методом и одними и теми же приборами. Такие ошибки можно устранить, применив более точные измерительные приборы или изменив метод измерения искомой величины. Систематические ошибки могут быть обусловлены разными причинами. Рассмотрим характерные случаи.

2.1.а) Ошибки известной природы, которые можно определить экспериментально или при помощи вычислений. Такие ошибки называют *поправками*, потому что, найдя ошибку и прибавив её к отсчёту прибора, мы можем скорректировать найденное числовое значение измеренной величины. Типичные примеры: введение поправок на магнитное поле Земли при лабораторных магнитных измерениях или учёт архимедовой силы (в атмосфере Земли) при нахождении массы тела путём взвешивания. В частности, в уже упоминавшемся примере об измерении сопротивления резистора R следует вводить поправку, обусловленную влиянием сопротивления вольтметра R_B на показания амперметра. Действительно, на рис. В.1 видно, что показания амперметра равны:

$$I = \frac{U}{R_{общ}} = U\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_в}\right),$$ откуда следует, что $$\frac{1}{R} = \frac{I}{U} - \frac{1}{R_B}.$$

Величина $1/R_B$ и есть искомая поправка.

2.1.б) Ошибки известной природы, но неизвестной величины.

С ошибками этого вида приходится сталкиваться каждому экспериментатору: радиоастроному, который измеряет интенсивность радиоизлучения от внеземных источников (Солнца, квазаров, радиогалактик и т.д.), мешает радиоизлучение атмосферы; геофизику, измеряющему радиоактивность минерала при помощи счетчика Гейгера, мешают космические лучи и т.д. Возможны два способа устранения ошибок такого рода: первый – измерить их и затем внести поправки, второй – придумать метод измерений, при котором измеряемая величина не зависела бы от мешающих факторов. На практике применяют оба способа, но это не всегда приводит к желаемому результату.

2.1.в) Приборные ошибки.

Эти ошибки обусловлены конструкцией измерительных приборов и технологией их изготовления и также заранее неизвестны. Предприятия - изготовители, однако, могут гарантировать некий максимальный уровень этих ошибок, который обычно указан на шкале прибора или в его техническом описании. Например, если на металлической линейке написано “0,1мм”, то это означает, что максимальная абсолютная приборная ошибка составляет 0,1 мм, и при помощи такой линейки бесполезно проводить измерения с точностью до сотых долей миллиметра. Погрешность электроизмерительных приборов обычно характеризуется **классом точности**. Например, если прибор имеет класс точности 0,1 (это число обычно указывается на шкале и, иногда, обводится кружком), то это означает, что показания прибора отличаются от эталона не более чем на **0,1%** предела измерений данного прибора (см. лабораторную работу 2.1).

В тех случаях, когда сведения о величине приборной ошибки отсутствуют, её принимают равной половине цены деления шкалы прибора, если отсчёт измеряемой величины непрерывный (стрелочный прибор, линейка, транспортир и т.п.). Для приборов с дискретным (прерывистым, скачкообразным) отсчётом (часы с “прыгающей” стрелкой, цифровые приборы и приборы со ступенчатой регулировкой, у которых значения регулируемой величины указаны напротив положений рукоятки соответствующих переключателей – генераторы низких частот, магазины сопротивлений или конденсаторов и т.п.) приборная ошибка считается равной минимальному шагу отсчета.

2.1.г) Ошибки неизвестного происхождения и неизвестной величины.

Это самая опасная разновидность систематических ошибок. Чаще всего такие ошибки возникают в результате непредусмотрительности экспериментатора, который не сумел выявить все мешающие факторы. Иногда (но значительно реже) за ними кроются новые, неизвестные дотоле явления. В истории физики известны случаи, когда подробный анализ причин расхождения эксперимента с теорией приводил либо к ложным (и, как правило, быстро опровергаемым результатами последующих экспериментов) выводам, либо к важнейшим открытиям фундаментального характера. Лучшим способом выявления систематических ошибок такого рода является повторение измерений с использованием другого метода.

2.2. Случайные ошибки.

Случайные ошибки отличаются от систематических, прежде всего тем, что они имеют различные значения в отдельных измерениях, проводимых при одинаковых условиях, и подчиняются случайным, вероятностным законам. Вероятность появления ошибок такого рода можно вычислить, пользуясь законами статистики. Погрешности измерений в этих случаях вызываются рядом дополнительных, побочных факторов, учесть которые заранее невозможно. Так, например, случайные изменения амплитуды напряжения на выходе радиоприёмника могут быть вызваны различными причинами: электронным шумом, обусловленным тепловым движением зарядов в электрических цепях; случайным изменением условий распространения радиоволн; электрическими помехами от гроз или электродвигателя пылесоса, работающего в соседней комнате и т.п.

Случайные ошибки обычно превышают приборные погрешности и сравнимы по своей величине с самой измеряемой величиной (их часто называют «шумом»). Но как это ни покажется парадоксальным, именно вероятностный характер случайных погрешностей позволяет, как будет показано ниже, если не исключить их полностью, то заметно ослабить их воздействие на результат измерений.

2.3. Промахи.

Промахи - это резкие отклонения результатов отдельных измерений от всех остальных. Появление промахов связано или с невнимательностью экспериментатора, или с неисправностью измерительных приборов, или, наконец, с резким изменением условий эксперимента. Как будет показано ниже, промахи при помощи специальной обработки результатов измерений могут быть выявлены, а соответствующие им результаты, отброшены.

В3. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ПРЯМЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

3.1. Числовая оценка измеряемой величины.

Измеряя несколько раз одну и ту же физическую величину (длину или массу, или время и т.п.), мы всегда получаем ряд чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$, вообще говоря, отличающихся друг от друга.

Но в математической статистике обычно вводится понятие ***истинного значения X*** измеряемой величины. Это позволяет ошибку ***i***-го измерения определить как разность между истинным значением X и результатом отдельного измерения x_i как

$$\delta_i = x_i - X \tag{1}$$

Эта ошибка включает в себя систематическую ошибку δ_c (одинаковую для всех измерений) и случайную ошибку $\tilde{\delta}_i$ (различную для разных измерений):

$$\delta_i = \delta_c + \tilde{\delta}_i . \tag{2}$$

Ни систематическая δ_c, ни случайная ошибка $\tilde{\delta}_i$ нам заранее не известны.

Простейшее допущение о систематической ошибке δ_c сводится к предположению, что имеется только приборная погрешность (это допущение обычно приемлемо для измерений в физическом практикуме), которая не превышает некоторого максимального значения $\delta_c^{\max}$ и является постоянной величиной. Поэтому далее в основном будет обсуждаться обработка случайных ошибок $\tilde{\delta}_i$.

Простейшее допущение о случайных ошибках $\tilde{\delta}_i$ сводится к предположению, что все эти ошибки $\tilde{\delta}_i$ статистически независимы, а средняя по выборке ошибка

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tilde{\delta}_i$$

стремится к нулю при неограниченном увеличении числа измерений:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tilde{\delta}_i\right) = 0 . \tag{3}$$

В ряде случаев соотношение (3) можно толковать следующим образом: положительные ($\tilde{\delta}_i$>0) и отрицательные ($\tilde{\delta}_i$<0) отклонения встречаются одинаково часто, так что в бесконечной сумме (3) происходит полная компенсация положительных и отрицательных ошибок.

В этом случае, как показывается в математической статистике, числовая оценка величины x дается средним арифметическим из n измерений:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \,. \tag{4}$$

Величину $\bar{x}$ называют также **выборочным средним** (средним по выборке).

Существенно, что выборочное среднее $\bar{x}$ - это случайная величина: в разных выборках из n измерений она может принимать различные значения. Несмотря на это, выборочное среднее ближе к X, чем единичные измерения x_i, поскольку отклонение выборочного среднего $\bar{x}$ от истинного значения X меньше большинства погрешностей единичных измерений. В самом деле, выразив x_i из (1) и подставив его в (4), получим:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X+\delta_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X+\delta_c+\tilde{\delta}_i) = X+\delta_c+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tilde{\delta}_i \,. \tag{5}$$

Согласно (3) при $n\to\infty$ происходит полная компенсация случайных ошибок, т.е. величина $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tilde{\delta}_i$ стремится к нулю. Поэтому, выборочное среднее $\bar{x}$ стремится к $X+\delta_c$.

Таким образом, выборочное среднее $\bar{x}$ служит лучшей числовой оценкой измеряемой величины X, чем любое из единичных измерений x_i. Поэтому, сделав достаточно много измерений, можно практически полностью исключить случайные погрешности.

Однако на практике мы имеем дело с ограниченным числом измерений – обычно не менее трёх (к тому же даже при большом числе измерений мы не устраняем систематическую погрешность δ_c). Чтобы оценить точность измерений в этих условиях, необходимо ввести ряд новых понятий.

3.2. Выборочная дисперсия. Среднеквадратичная и среднеарифметическая погрешность.

Из эксперимента мы можем найти только случайные отклонения отсчетов x_i от выборочного среднего $\bar{x}$. Эти отклонения мы обозначили как $\tilde{\delta}_i$:

$$\tilde{\delta}_i = x_i - \bar{x} \,. \tag{6}$$

Выборочной дисперсией s^2 измерения называется величина

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\tilde{\delta}_i)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \,. \tag{7}$$

Квадратный корень из выборочной дисперсии, то есть величина $\sqrt{s^2}=s$, называется **среднеквадратичной погрешностью** измерения:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\tilde{\delta}_i)^2} \,. \tag{8}$$

Среднеквадратичная погрешность s характеризует степень разброса единичных измерений относительно *X:* в интервал $\bar{x} - s < x_i < \bar{x} + s$ попадает примерно 70% всех отсчётов x_i.

Степень разброса единичных отсчётов можно также оценить среднеарифметической погрешностью

$$r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\tilde{\delta}_i\right| . \qquad (9)$$

Вычислять среднеарифметическую погрешность r проще, чем среднеквадратичную ошибку s. Однако, как показано в математической статистике, использование среднеквадратичной погрешности предпочтительней.

Выборочная дисперсия s^2 тоже случайная величина: она принимает различные значения для разных серий измерений. Однако при очень большом числе измерений выборочная дисперсия стремится к вполне определённому значению σ^2, которое называется дисперсией генеральной (т. е. всеобщей, содержащей бесконечное число отсчётов) выборки:

$$\sigma^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - X)^2 .$$

Для оценки точности измерений в теории вероятностей используется также понятие *плотности вероятности* величины x_i. Плотность вероятности $w(x_i)$, умноженная на малый интервал dx, даёт вероятность попадания P случайной величины x_i в интервал от x до $x + dx$:

$$w(x_i)dx = P(x<x_i<x+dx). \qquad (10)$$

Статистическое среднее (*математическое ожидание*) величины x определяется при этом как

$$\bar{x}_{\text{ст}} = \int_{-\infty}^{\infty} x w(x)dx , \qquad (11)$$

а разброс значений измеряемой величины вокруг её математического ожидания - *дисперсия генеральной выборки*, как

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\bar{x})^2 w(x)dx . \qquad (12)$$

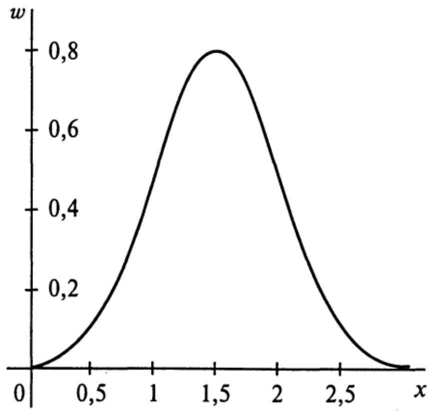

Рис. B2

Если функция распределения вероятностей $w(x)$ имеет вид одногорбой кривой, как показано на рис. B.2, то $\bar{x}_{\text{ст}}$ приблизительно отвечает положению максимума кривой $w(x)$, поскольку значения случайной величины x концентрируются вблизи $\bar{x}_{\text{ст}}$. Дисперсия же σ^2 характеризует «ширину» кривой, то есть степень разброса величин x_i относительно $\bar{x}_{\text{ст}}$.

Приступая к опыту, мы не знаем истинного значения дисперсии σ^2, но мы можем с той или иной степенью точности оценить её. Такой приемлемой оценкой σ^2 может служить выборочная дисперсия s^2.

3.3. Точность измерений.

Точность измерений (числовой оценки X) определяется по-разному в зависимости от соотношения между приборной ошибкой δ_c и среднеквадратичной ошибкой s.

3.3.1. Когда случайные погрешности пренебрежимо малы ($\tilde{\delta} << \delta_C$), то точность числовой оценки величины X определяется приборной погрешностью. Истинное значение X отличается от величины $\bar{x}_{ст}$ не более чем на δ_C:

$$\bar{x}_{CT} - \delta_c \le X \le \bar{x}_{CT} + \delta_c \qquad \text{или} \qquad X = \bar{x}_{ст} \pm \delta_C. \tag{13}$$

Ясно, что при $s << \delta_C$ не нужно проводить много измерений. В принципе достаточно ограничиться лишь единичным отсчётом, взяв в качестве $\bar{x}_{ст}$ результат любого измерения x_i. Однако предварительно нужно убедиться в том, что $s << \delta_C$.

На практике, как уже говорилось, проще оценивать не среднеквадратичную погрешность s, а среднеарифметическую погрешность r, которая сравнима с s по порядку величины. Поэтому достаточно проверить выполнение условия $r << \delta_C$. Еще проще (и это вполне допустимо) проверить условие $|\Delta x|_{\max} << \delta_C$, где $|\Delta x|_{max}$ - максимальное значение абсолютной погрешности $\Delta x_i = (x_i - \bar{x})$ (см. раздел В1). Если $|\Delta x|_{max} << \delta_C$, то ошибка измерений определяется только прибором и результат измерений записывается в форме (13), в которой $\bar{x}_{ст}$ заменяется на $\bar{x}$.

3.2.2. По-иному обстоит дело в другом предельном случае, когда $s >> \delta_C$. В этом случае можно пренебречь в формуле (5) систематической погрешностью δ_C:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = X + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \tilde{\delta}_i \, . \tag{14}$$

Используя это выражение, можно показать, что **дисперсия выборочного среднего** $(\sigma`)^2$ равна

$$\sigma'^2 = \frac{\sigma^2}{n}, \tag{15}$$

где σ^2 — дисперсия генеральной выборки.

Таким образом, среднеквадратичное отклонение выборочного среднего σ' в $\sqrt{n}$ раз меньше σ. Это означает, что с ростом числа измерений разброс случайной величины $\bar{x}_{ст}$ относительно истинного значения X уменьшается.

Обрабатывая результаты измерений x_i по формуле (7), мы можем определить не дисперсию генеральной выборки σ^2, а выборочную дисперсию s^2. Поэтому для среднеквадратичного отклонения выборочного среднего σ' получаем приближенную формулу

$$\sigma' = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum(\tilde{\delta}_i)^2}{n(n-1)}} \, . \tag{16}$$

Эта величина и принимается за точность измерений при $s >> \delta_C$. Считают, что истинное значение X с вероятностью $P=0.68$ лежит в интервале:

$$\bar{x} - \sigma' \le X \le \bar{x} + \sigma' \quad \text{или} \quad X = \bar{x} \pm \sigma' \, . \tag{17}$$

При P=0.95 $X = \bar{x} \pm 2\sigma'$, а при P=0.9973 $X = \bar{x} \pm 3\sigma'$. Таким образом, погрешность измерений разумно характеризовать большей из величин δ_c или σ'. Если же они примерно одинаковы, то полную погрешность $\delta_{\text{полн}}$[2)] вычисляют по формуле

$$\delta_{\text{полн}} = \sqrt{\delta_c^2 + (\sigma')^2}\ . \tag{18}$$

Из этого соотношения видно, что при $\delta_c > 3\sigma'$ погрешностью σ' можно пренебречь, а в случае $\sigma' > 3\delta_c$ можно пренебречь погрешностью δ_c.

3.3. Выбор числа измерений.

Увеличивая число измерений n, случайную погрешность σ' можно сделать как угодно малой. Ясно, однако, что безграничное увеличение n нецелесообразно. Разумное ограничение числа опытов состоит в том, чтобы сделать σ' меньше приборной ошибки δ_c, доведя её, скажем, до уровня $\sigma' = \delta_c / 2$. Из этого соотношения при помощи (16) легко оценить нужное число измерений:

$$n \approx \left(\frac{2s}{\delta_{\text{c}}}\right)^2 .$$

Если, например, $s = 5\delta_c$, то n=100. Дальнейшее увеличение числа измерений уменьшило бы случайную погрешность σ', но не улучшило бы точности числовой оценки X.

3.4. Надежность измерений.

Так как обычно число измерений n существенно меньше, чем следует из (18), то истинное значение X лежит в интервале (17) не точно, а с вероятностью α.

Поэтому надежность измерений характеризуется *доверительной вероятностью* α и *доверительным интервалом* Δx_α. Доверительный интервал Δx_α ограничивает такую окрестность $\bar{x} \pm \Delta x_\alpha$, куда с заданной (доверительной) вероятностью α попадает истинное значение X. Доверительный интервал и доверительная вероятность, таким образом, связаны между собой соотношением

$$P(\bar{x} - \Delta x_\alpha < X < \bar{x} + \Delta x_\alpha) = \alpha\ . \tag{19}$$

Из этого соотношения можно в принципе найти Δx_α при заданном α и наоборот.

В простейшем случае, когда основная погрешность имеет систематическое происхождение ($\delta_c >> s$), истинное значение X лежит в интервале $\bar{x} - \delta_c \le X \le \bar{x} + \delta_c$ со стопроцентной вероятностью (надежностью):

$$P(\bar{x} - \delta_c \le X \le \bar{x} + \delta_c) \approx 1\,, \tag{20}$$

поскольку δ_c – это верхняя граница возможных погрешностей. Из сравнения выражений (19) и (20) следует, что $\pm\delta_c$ – это величина доверительного интервала Δx_α, соответствующего 100–процентной надежности.

3.5. Исключение промахов.

Среди отсчётов x_i, полученных в результате n измерений, могут оказаться числа, резко отличающиеся от остальных. Такие числа могут появиться в результате описок, из-за невнимательности, из-за случайных кратковременных

[2)] Здесь $\delta_{\text{полн}}$ является аналогом величины Δx в разделе В1 «Введения в физический практикум».

сильных помех и т.д. Обычно такие числа (промахи) исключаются из рассмотрения. Критерий отбрасывания промахов состоит в том, что исключаются из рассмотрения отсчеты, для которых $|\Delta x_i| > 3s$. Обоснованием этому служит то, что при нормальном законе распределения ошибок вероятность попадания абсолютной погрешности измерения Δx_i за пределы интервала ($-3s$, $+3s$) составляет всего лишь 0,3%.

Следует, однако, отметить, что сначала надо рассчитать s с учётом всех измерений, включая предполагаемые промахи, и затем уже проводить сравнение. После отбрасывания промахов, расчёт s следует провести заново.

3.6. Пример обработки результатов прямых измерений.

Пусть в результате восьми измерений некоторой величины с приборной погрешностью $\delta_c = 0{,}5$ получены некоторые числа x_i (см. табл. 1).

Вычислим сначала выборочное среднее $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i$. В нашем случае

$$\bar{x}=(101+100+103+92+99+97+94+98)/8 = 98.$$

Таблица 1

x_i	101	100	103	92	99	97	94	98
$\Delta x_i = x_i - \bar{x}$	3	2	5	-6	+1	-1	-4	0
$(\Delta x_i)^2$	9	4	25	36	1	1	16	0

Вычислим далее абсолютные погрешности отдельных измерений $\Delta x_i = x_i - \bar{x}$, их квадраты $(\Delta x_i)^2$ и среднеквадратичную погрешность $s = \sqrt{\dfrac{\sum (\Delta x_i)^2}{n-1}}$. Имеем:

$$s = \sqrt{\tfrac{1}{8}(9+4+25+36+1+16+0)} = \sqrt{13} = 3.6$$

Поскольку ни одно из чисел Δx_i, не превышает $3s = 10{,}8$, то среди результатов измерений нет промахов.

В нашем случае среднеквадратичная погрешность $s = 3{,}6$ оказалась больше приборной. Поэтому точность измерений определяется случайными, а не приборными погрешностями. Среднеквадратичное отклонение выборочного среднего $\bar{x}$ можно определить по формуле (16):

$$\sigma' \approx \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{3{,}6}{\sqrt{9}} \approx 1{,}2.$$

Поскольку $\delta_c = 0{,}5$, заключаем, что точность числовой оценки $\bar{x}$ тоже определяется преимущественно случайными ошибками, так что

$$X = \bar{x} \pm \sigma' = 98 \pm 1{,}2.$$

Чтобы снизить случайную погрешность $\sigma' = \frac{s}{\sqrt{n}}$ до уровня систематической погрешности $\delta_{\max} = 0{,}5$, т, е. уменьшить σ' примерно в 2,5 раза, нужно было бы увеличить число измерений в $2{,}5^2 \approx 6$ раз, т. е. сделать $8 \cdot 6 = 48$ измерений. Уровень же $1/2\,\delta_{\max} = 0{,}25$ может достигаться примерно при 200 измерениях.

Заметим, что значение $\bar{x}$ при записи окончательного результата следует округлять с учётом величины абсолютной ошибки, а именно: порядок последней значащей цифры $\bar{x}$ не должен быть меньше порядка первой значащей цифры ошибки (например, $1243 \pm 2{,}4$, а не $1242{,}8 \pm 2{,}4$). Действительно, невозможно гарантировать значение величины на уровне десятых долей, если ошибка измерений составляет несколько единиц. Поэтому кажущееся бессмысленным написание измеренной величины, например, в виде $a = 25{,}000$ имеет глубокий смысл. Такая запись означает, что величина a была измерена с точностью до тысячного знака после запятой.

Относительная ошибка ε в нашем примере равна

$$\frac{\sigma'}{\bar{x}} = \frac{1{,}2}{98} \approx 0{,}012 = 1{,}2\% .$$

В4. ПОГРЕШНОСТИ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Большинство физических величин приходится измерять косвенным образом. При этом сначала измеряются, например, прямым методом некоторые независимые величины *x* и *y,* а затем интересующая нас величина *A* определяется по расчетной формуле:

$$\boldsymbol{A = f\,(x,y)}.$$

Вопрос о погрешностях величины *A* в этом случае решается для систематических и случайных ошибок математическими методами. Пусть $\bar{x}$ и $\bar{y}$ - средние значения непосредственно измеренных независимых величин *x* и *y*, а величины Δx и Δy - соответствующие им абсолютные погрешности этих прямых измерений, которые являются независимыми ошибками. Тогда в качестве числового значения величины *A* берут:

$$A_c = f(\bar{x}, \bar{y}),$$

а абсолютную ошибку ΔA определяют как $\Delta A = \pm\varepsilon_A \cdot |A_c|$ (далее знаки ± не ставятся, и они будут иметься ввиду по умолчанию).

Пусть величина *y* найдена или известна с точностью во много раз превышающей точность определения *x*, что на математическом языке в первом приближении это означает, что $\Delta y \to 0$ и $y = const$. Тогда максимальная относительная ошибка вычисления величины A_c находится по формуле:

$$\varepsilon_A\big|_{y=const} \approx d\{ln[f(x,y)]\}\ \big|_{y=const} = \frac{1}{|A_c|}\ \left|\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right]_{y=const}\right|\Delta x = \left|\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right]_{y=const}\right|\frac{\Delta x}{|A_c|} = \left|\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right]_{y=const}\right|\varepsilon_{xc}, \qquad (21)$$

где $\varepsilon_{xc} = \Delta x / |A_c|$.

В формуле (21) под знаком модуля стоит частная производная функции $A=f(x,y)$ по переменной x, которая обозначается как $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$. По определению частной производной функции нескольких переменных эта производная находится по правилам дифференцирования функции одной переменной при условии, что остальные переменные рассматриваются как постоянные величины. Поэтому условие типа «$y=const$» не ставится.

Очевидно, что аналогичное соотношение, но со сменой соответствующих индексов x на y, можно получить, и для ε_{yc}. Поскольку вид формулы (21) не зависит от точности измерения переменных x и y, а сами относительные ошибки ε_{xc} и ε_{yc} являются независимыми величинами, то их результирующая ε_A должна находиться по правилу вычисления модуля вектора (что показывается в математической статистике), то есть:

$$\boldsymbol{\varepsilon_A^2 = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)^2 \varepsilon_{xc}^2 + \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)^2 \varepsilon_{yc}^2}, \qquad (22)$$

или в случае k независимых переменных получаем следующее соотношение:

$$\boldsymbol{\varepsilon_A^2 = \left(\frac{\partial f(x,\dots,k)}{\partial x}\right)^2 \varepsilon_{xc}^2 + \dots + \left(\frac{\partial f(x,\dots,k)}{\partial k}\right)^2 \varepsilon_{kc}^2}. \qquad (23)$$

Из соотношений (22) и (23) следует, что относительная ошибка косвенных измерений величины A зависит не только от точности прямых измерений, например x, но и от самой функциональной зависимости A, а именно частной производной $\frac{\partial A}{\partial x}$ и среднего значения искомой величины $A_c = \bar{A}$.

Рассмотрим примеры вычисления относительных ошибок для некоторых функциональных зависимостей, в которых коэффициент a не имеет размерности, то есть некоторое число, а коэффициент β имеет размерность обратную аргументу:

1) $A = a\,x$; $\quad \varepsilon_A = \varepsilon_x$, $\quad$ где $\varepsilon_A = \varepsilon_x = \Delta x / |\bar{x}|$.

2) $A = a\,x \pm y$; $\quad \varepsilon_A^2 = a^2 \varepsilon_{x_c}^2 + \varepsilon_{y_c}^2$, $\quad$ где $\varepsilon_{x_c} = \Delta x / |\bar{A}|$; $\varepsilon_{y_c} = \Delta y / |\bar{A}|$.

3) $A = \frac{axy}{z}$; $\quad \varepsilon_A^2 = \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2$, $\quad$ где $\varepsilon_x = \Delta x / |\bar{x}|$, $\varepsilon_y = \Delta y / |\bar{y}|$, $\varepsilon_z = \Delta z / |\bar{z}|$.

4) $A = ln\,(\beta\,x)$; $\quad \varepsilon_A = \frac{\varepsilon_x}{|ln\,(\beta\bar{x})|} = \frac{\varepsilon_x}{|\bar{A}|}$. $\quad$ 5) $A = lg\,(\beta\,x)$; $\quad \varepsilon_A = \frac{0{,}433\,\varepsilon_x}{|lg\,(\beta\bar{x})|} = \frac{0{,}433\,\varepsilon_x}{|\bar{A}|}$.

6) $A = e^{\beta x}$; $\quad \varepsilon_A = \beta\,\Delta x$. $\quad$ 7) $A = x^a$; $\quad \varepsilon_A = a\,\varepsilon_x$.

Отметим, что, если в формулу для определения величины A входят математические константы (π, e и т.п.), универсальные физические постоянные, табличные данные из справочников и т.п., то следует помнить, что точность задания этих величин не должна быть ниже точности измеренных величин $x, \dots, k$. Поэтому округление этих констант нужно проводить таким образом, чтобы отношение «отброшенной» части константы к её округленному значению было бы меньше $\varepsilon_{xc}, \dots, \varepsilon_{kc}$. Тогда ошибкой округления можно пренебречь. Например, в 5-ом примере значение десятичного логарифма числа e приведено с точностью

0,29%, но на практике точность обычных измерений в десять раз меньше и поэтому достаточно записать его значение как 0,43.

В5. ЗАПИСЬ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА

5.1. В каждом эксперименте очень важно немедленно и без какой-либо обработки записывать результаты проделанных измерений. Запись должна быть ясной и экономной. Не следует проводить никаких, даже самых простых арифметических расчетов в уме, не записав результат измерения. Например, если для определения силы тока в амперах показания амперметра нужно делить на 2, то рекомендуется вначале записать показания прибора в делениях шкалы, цену деления шкалы и лишь затем разделить результаты на 2. Действительно, если при делении в уме была допущена ошибка, то позже без записи результата непосредственного измерения исправить её уже невозможно. При проведении и записи измерений желательно проверить то, что записано, взглянув ещё раз на прибор. Это способствует исключению промахов.

Иногда целесообразно записывать серийные номера приборов, используемых при измерениях. Впоследствии это может пригодиться: так, если в ходе эксперимента или домашних расчетов обнаружатся какие-нибудь неувязки, то всегда можно заново проверить данный результат, не проводя всей серии измерений на новых приборах.

5.2. Результаты экспериментов удобнее всего записывать в виде таблиц. Такая запись компактнее и проще для чтения. В начале каждого столбца пишется название или символ соответствующей величины и указывается единица измерения. В таблице должны быть записаны значения величин, как полученные непосредственно в эксперименте, так и рассчитанные затем на основе экспериментальных данных.

5.3. Перед вычислениями следует выписать значения используемых констант и параметров экспериментальных установок с требуемой точностью.

В6. ВЫЧИСЛЕНИЯ

Цель эксперимента – получить числовое значение некоторой физической величины. Поэтому точность при вычислениях так же важна, как и при измерениях. Точность вычислительных средств (калькулятор, различные математические таблицы) не должна быть ниже точности измерений.

Вероятность появления случайных ошибок при расчетах можно уменьшить при рациональном подходе к вычислениям. Укажем некоторые способы устранения арифметических ошибок.

6.1. Чтобы избежать ненужных выкладок, целесообразно максимально упростить используемую формулу: вынести постоянные множители из-под корня, привести подобные члены, сократить общие множители и т. д. Приведем пример.

При проверке уравнения Бернулли в эксперименте с использованием трубок различного сечения измеряется расход воды Q и разность давлений в трубках $\Delta p = p_1 – p_2$. На построенный по полученным данным график $Q = f(\sqrt{\Delta p})$ наносится теоретическая зависимость, для расчета которой используются экспериментальные значения разности давлений Δp:

$$Q = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\left(\frac{1}{S_1^2} - \frac{1}{S_2^2}\right)}\rho},$$

где S_1, S_2 – сечения трубок, ρ – плотность жидкости. Для упрощения расчета теоретических данных рекомендуется сначала вычислить постоянный множитель $K = \sqrt{\frac{2}{\left(\frac{1}{S_1^2} - \frac{1}{S_2^2}\right)}\rho}$, а затем для различных значений Δp рассчитать Q по формуле

$$Q = K\sqrt{\Delta p}\ .$$

6.2. Вычисления должны проводиться как можно более последовательно и аккуратно. Запись следует вести так, чтобы было много свободного места. Неаккуратная и неразборчивая запись выкладок часто оказывается причиной арифметических и других ошибок. Все вычисления должны сразу выполняться в чистовой тетради. <u>Данные всех последовательных вычислений, как правило, должны быть представлены в таблице</u>.

6.3. Проверку арифметических выкладок следует рассматривать как необходимую часть вычислений. При расчетах нужно следить за тем, чтобы полученные значения имели разумный порядок величины. Для этого до начала вычислений приблизительно определяется порядок искомой величины и её размерность.

При выполнении лабораторных работ целесообразно использовать различные методы вычислений. По инструментальному признаку их можно разделить на: *устные, с карандашом и бумагой, и компьютерные*.

Устные вычисления (в уме) производятся с точностью равной одной или двум значащим цифрам и используются для оценки полученных результатов и оперативного выявления очень грубых промахов. Такие вычисления не требуют никаких инструментов и способствуют развитию памяти, абстрактного мышления и умения выделять главное.

Вычисления с карандашом и бумагой (иногда с калькулятором) широко применяются для обработки результатов небольшого объема. Такие вычисления позволяют следить за преобразованием данных по шагам и способствуют развитию не только логического, но и операционного мышления. Кроме того, они развивают способность к концентрации внимания и способствуют запоминанию и структуризации материала.

Компьютерная обработка данных используется только в случае очень больших объемов расчетов, когда используемые при таких расчетах методы освоены или же, когда стоит задача краткого знакомства с этими методами только на уровне их применения. Кроме того, компьютер часто используется при статистических расчетах, прямом численном моделировании, интерполяции, экстраполяции, регрессии (подборе коэффициентов формул), сборе экспериментальных данных и обработке результатов эксперимента в реальном масштабе времени.

Например, при нахождении произведения двух величин и оценки точности полученного результата достаточно в зависимости от требуемой точности и числа измерений все вычисления произвести или устно, или с карандашом и бумагой, а при нахождении среднего значения и дисперсии серии из десятков значений имеет смысл воспользоваться компьютером или соответствующим калькулятором.

По типу восприятия и мышления методы вычислений можно разделить на: *численные* (табличные), *аналитические* (символьные) и *визуальные* (графические). Все они должны использоваться не только при компьютерной и бумажной обработке, но и, что очень важно для развития способностей обучаемых, при вычислениях в уме.

Отметим, что наиболее полное и наглядное представление об изучаемом явлении можно получить только при одновременном описании в цифровой (таблицы), графической (графики зависимостей одной и нескольких переменных) и абстрактной символьной (формулы и уравнения) формах.

В7. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

В экспериментальной физике широко пользуются графиками. Графический метод представления результатов даёт возможность наглядно проследить вид функциональной зависимости. Используя графическую зависимость $y(x)$ в пределах проведенных измерений, можно находить значения величины y для таких значений x, для которых измерения не проводились.

При построении графика следует заранее выбрать масштаб, разметить оси координат и лишь после этого приступать к нанесению на график экспериментальных точек.

При выборе масштаба на графике следует исходить из следующих соображений:

1) Экспериментальные точки не должны сливаться друг с другом. В этом случае из графика трудно извлечь полезную информацию. Поэтому лучше выбрать такой масштаб, чтобы расположить точки с разумным интервалом.

2) Масштаб должен быть простым. Проще всего, если единица измеренной величины (или 10, 100, 0,1 и т. д. от единицы) на оси графика соответствует 1 см. Можно выбрать такой масштаб, чтобы 1 см соответствовал двум или пяти единицам. Других масштабов следует избегать, потому что при нанесении точек на график придется производить дополнительные арифметические расчеты. Степени десяти удобнее относить к единице измерения. Тогда деления масштаба на осях графика можно отмечать цифрами 1, 2, 3 или 10, 20, 30, …, а не 10000, 20000 и т.д. или 0,001, 0,002 и т.д. На осях координат следует указывать название или символ измеряемой величины и единицы её измерения (например, «I, 10^{-3} А»

или «U, 10^2 В»). Чтобы не перегружать оси графика надписями, рекомендуется надписывать на осях только начало координат, первое и кратные пяти или десяти деления масштаба.

Числовые значения измеряемых величин на графике указывать не следует. Результаты, полученные в разных сериях измерений, а также теоретические значения исследуемой величины обозначают на графике (рис. В.3) отличающимися друг от друга значками (точками, крестиками, кружочками и т.п.). Собственно график (линию) проводят через экспери-

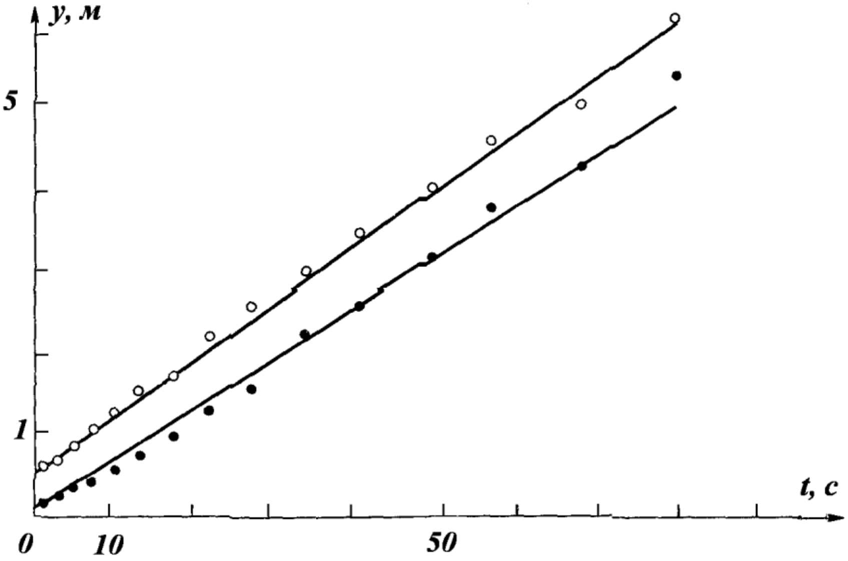

Рис. В.3

ментальные точки в виде плавной линии (здесь прямая) так, чтобы эти точки равномерно распределялись по обе стороны кривой. Дополнительным способом проверки правильности графика служит нанесение экспериментальных точек в виде вертикальных и горизонтальных отрезков, длины которых определяются абсолютными ошибками измерения соответствующих величин (на рис. В.3 они не изображены). Кривая графика должна проходить в пределах этих отрезков.

Кроме системы координат с равномерным масштабом, часто применяются *полулогарифмическая* и *логарифмическая* шкалы. Полулогарифмическая система координат – это прямоугольная система координат, по одной оси которой используется равномерный масштаб, а по второй – неравномерный логарифмический масштаб. Он будет равномерным для логарифмов чисел.

Действительно, если некоторое физическое явление описывается математической формулой:

$$\varphi(t) = \varphi_0\, e^{-\beta t}. \tag{24}$$

При этом в эксперименте измеряются значения величины $\varphi(t_i)$ в моменты, допустим, времени t_i, а по результатам этих прямых измерений необходимо найти коэффициент (число) в показателе экспоненты (β). Из формулы (24) можно получить, что для результатов каждого измерения справедливо следующее соотношение:

$$ln(\varphi_0 /\varphi_i) = \beta\, t_i. \tag{25}$$

Из (25) следует, что построив результаты экспериментов в полулогарифмическом масштабе $\{t, ln(\varphi_0 /\varphi)\}$, экспериментальные точки расположатся вдоль прямой, тангенс угла наклона которой к оси абсцисс (t) равен искомому коэффициенту β.

Если физическая закономерность описывается формулой: $y = x^{\alpha}$, в которой α – искомый в эксперименте постоянный коэффициент, то из формулы видно, что, построив полученные прямыми измерениями значения x_i и y_i в логарифмическом масштабе {lgx, lgy}, экспериментальные точки расположатся вдоль прямой, тангенс угла которой к оси абсцисс равен искомому коэффициенту α: $lg\, y = \alpha\, lg\, x$.

Таким образом, при выборе системы координат рекомендуется строить графики в таких координатах {x,y}, в которых предполагаемая функциональная зависимость выражается прямой линией. Это позволяет быстро проверить правильность предположения и легко определить параметры зависимости. Например, если предполагается зависимость $A(t) = k_1 + \frac{k_2}{t}$, то в координатах {$\frac{1}{t}$, A} она должна выражаться прямой линией. Коэффициенты k_1 и k_2 можно определить тогда непосредственно из графика.

<u>Обработка результатов измерений в соответствии с приведенными в настоящем разделе рекомендациями обеспечивает успешное выполнение лабораторных работ в физическом практикуме</u>.

В8. ПОРЯДОК РАБОТЫ СТУДЕНТОВ В ЛАБОРАТОРИЯХ ФИЗИЧЕСКОГО ПРАКТИКУМА

1. За учебный семестр студентом выполняется 10-12 лабораторных работ в соответствии с графиком их выполнения на занятиях, продолжительностью 3-х академических часов (135 мин.). Первые (одно или два) занятия в семестре вводные и, как правило, фронтальные. Выполнение работы условно делится на 3 этапа.

1-й этап – подготовительный по конкретной лабораторной работе <u>во внеаудиторное время</u>. На этом этапе студенты, предварительно самостоятельно ознакомившись с описанием лабораторной работы, начинают оформление бланка протокола работы в своей рабочей тетради: пишут название и цель лабораторной работы и названия выполняемых заданий; записывают (при необходимости выводят) формулы для вычисления результатов измерений с расшифровкой всех буквенных обозначений и нахождения абсолютных и относительных ошибок прямых и косвенных измерений (см. разделы В1 - В4); <u>карандашом</u> рисуют таблицы для записи промежуточных экспериментальных результатов (см. раздел В5). Затем изучают экспериментальную установку и последовательность выполнения лабораторной работы <u>под руководством дежурного инженера</u> вне сетки учебного расписания (<u>самоподготовка</u>), и внося изменения и дополнения в протокол работы, в том числе сводную таблицу из описания лабораторной работы.

2-й этап – выполнение работы: студенты получают теоретический и практический допуски к работе на лабораторных установках и проводят эксперименты. Лабораторная работа считается выполненной, если полностью проведены необходимые измерения и расчеты (см. раздел В6), построены графики (см. раздел В7) и вычислены ошибки измерений, и все это внесено в протокол (<u>протокол оформлен</u>!).

3-й этап – итоговое занятие по теме, на котором студенты объясняют (защищают) результаты, полученные в лабораторных работах, отвечают на вопросы преподавателя, в том числе помещённые в разделе «Вопросы и упражнения».

2. Студенты выполняют лабораторные работы по индивидуальному графику, составленному преподавателем в начале семестра. Бланк графика оформляется студентом в начале его лабораторной тетради (см. ниже) и служит для контроля и оценки преподавателем деятельности студента на лабораторных занятиях в течение всего семестра, что фиксируется подписью преподавателя (самоподготовка – подписью инженера). Студент получает зачет по лабораторным занятиям, если полностью выполнил индивидуальный график работы в лабораторном практикуме.

3. Студент не допускается к выполнению очередной лабораторной работы при отсутствии протокола лабораторной работы, а также, если он не имеет защит по двум выполненным ранее работам.

Образец оформления бланка графика выполнения студентом лабораторных работ

ИНДИВИДУАЛЬНЫЙ ГРАФИК РАБОТЫ
В ЛАБОРАТОРНОМ ПРАКТИКУМЕ ПО МЕХАНИКЕ
СТУДЕНТА ____________________________
1 КУРСА ________ГРУППЫ

Неделя	**I**	**II**	**III**	**IV**	**V**	**VI**	**VII**	**VIII**	**IX**		**XVIII**
Дата											
№ работы											

КОНТРОЛЬ ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

№ и название лабораторной работы	**Самопод-товка**	**Допуск**	**Выполнение**	**Защита**

ЗАЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ

______________________ **Дата и подпись преподавателя**
